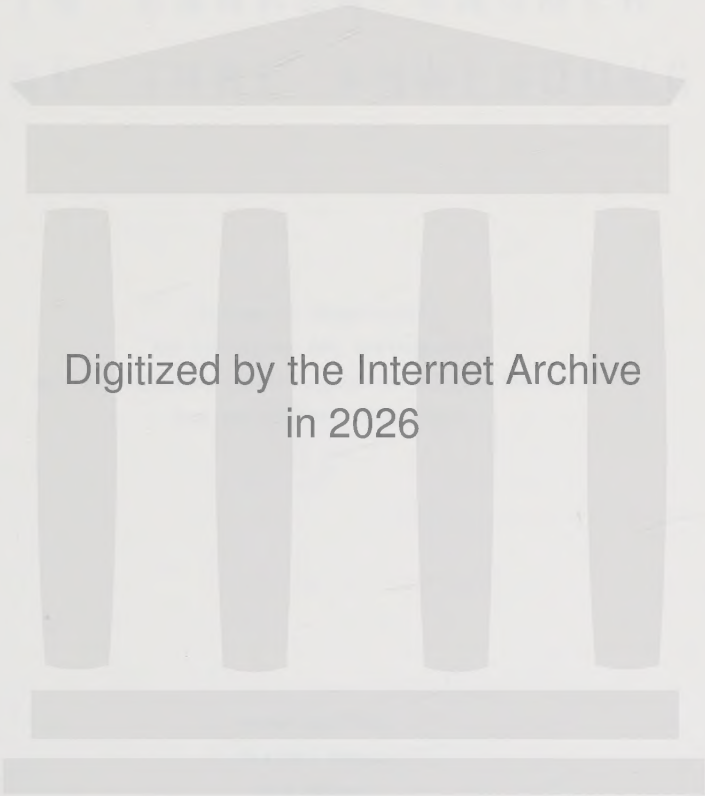
ITERATIONSVERFAHREN IN BANACH-RÄUMEN UND IHRE ANWENDUNG

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Dietmar Meyer
aus Neuss

Düsseldorf 1978

1979


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544328_0004

ITERATIONSVERFAHREN IN BANACH-RÄUMEN UND IHRE ANWENDUNG

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Dietmar Meyer
aus Neuss

Düsseldorf 1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. B. Döring

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. F. Ebersoldt

Tag der mündlichen Prüfung: 17.5.1979

Mein besonderer Dank gilt

Herrn Prof. Dr. B. Döring

für die wohlwollende Förderung, die er mir während meines gesamten Studiums stets bereitwillig zuteil werden ließ und für die verständnisvolle Anleitung und Unterstützung, mit der er meine Arbeiten fortwährend begleitete.

Inhaltsübersicht:

Einleitung S. 1 - 12

Aufgabenstellung und Konstruktion von Lösungsverfahren.

Es wird ausgegangen vom allgemeinen Prinzip der iterativen Approximation der Lösung einer Gleichung. Zusammen mit der Definition der Konvergenzordnung einer Näherungsfolge erhält man dann leicht eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein Iterationsverfahren von einer vorgegebenen (ganzzahligen) Ordnung konvergiert. Diese Bedingung wird dann zur Grundlage der Konstruktion von Iterationsverfahren gemacht. Durch weitere Spezialisierung der Überlegungen gelangt man schließlich zu recht einfachen Konstruktionsprinzipien, die als Verfahren 2. Ordnung das Newton-Verfahren und als typische Vertreter von Verfahren 3. Ordnung das Halley- und Tschebyscheff-Verfahren liefern. Diese ausschließlich aus der Konvergenzordnung von Iterationsverfahren heraus entwickelten Überlegungen gestatten es auch leicht, zu jedem Verfahren höherer Ordnung das entsprechende "modifizierte" Verfahren anzugeben. Es wird außerdem noch die Herleitung von Iterationsverfahren aus abgebrochenen Taylorentwicklungen und der Taylorentwicklung der Umkehrfunktionen betrachtet. Weiterhin wird die enge Verwandtschaft zwischen den verschiedenen Iterationsverfahren diskutiert.

Kapitel I S. 13 - 24

Newton-Verfahren, modifiziertes Newton-Verfahren und gemischtes Newton-Verfahren.

Es werden drei Varianten des Newton-Verfahrens betrachtet. Die in diesem Abschnitt angegebenen Sätze und Beweise sind zwar sämtlich aus der Literatur bekannt; ihre Verwendung in den folgenden Abschnitten machte jedoch gewisse Modifikationen der Beweisführungen notwendig, so daß ein bloßer Hinweis auf die Literatur von einem sehr exakten mathematischen Standpunkt aus anfechtbar gewesen wäre. Überdies gewinnt diese Arbeit durch diesen Abschnitt in ihrer Thematik eine gewisse Abrundung.

Kapitel II S. 25 - 78

Einige Sätze zum Tschebyscheff-Verfahren.

Der besonders anwendungsorientierten Zielsetzung dieser Arbeit folgend wird zunächst diskutiert, welche Forderungen man an einen Konvergenzsatz bezüglich "guter Anwendbarkeit" zu stellen hat. Für die folgenden Betrachtungen wichtig ist die Aufspaltung des Begriffs "Konvergenzvoraussetzung" in den Begriff "Konvergenzgrößen", durch den die allein auf ein spezielles Problem bezogenen Informationen (Abschätzung eines Operators über eine vorgegebene Menge etc.) gekennzeichnet werden, und den Begriff "Konvergenzbedingung", der sich auf die Auswertung der problembezogenen Informationen bezieht. Während man nun von den problembezogenen "Konvergenzgrößen" verlangen muß, daß sie sich auch bei komplizierten Aufgabenstellungen noch mit erträglichem Aufwand bestimmen lassen, kann die Verarbeitung dieser Informationen in der Konvergenzbedingung ein sehr komplexer algorithmischer Prozeß sein, der

schließlich (im Sinne einer hinreichenden Bedingung) zu entscheiden gestattet, ob ein Verfahren konvergiert. In diesem Sinne werden die problembezogenen Informationen, die in den Sätzen dieser Arbeit vorausgesetzt werden, möglichst einfach gehalten, während gleichzeitig durch eine besonders sorgfältige Auswertung dieser Informationen möglichst scharfe Konvergenzaussagen angestrebt werden.
Ausgehend von einer kurzen Analyse der spezifischen Schwierigkeiten, die bisherige Untersuchungen zum Tschebyscheff-Verfahren in ihren Ergebnissen begrenzten, wird eine neue Beweismethode entwickelt, die diese Schwierigkeiten teilweise umgeht und hierdurch zu besseren Aussagen gelangt. Das Tschebyscheff-Verfahren wird dabei als "gestörtes" Newton- bzw. "gestörtes" gemischtes Newton-Verfahren behandelt. Hierdurch werden auch Konvergenzsätze erhalten, die keinerlei Voraussetzungen bezüglich der dritten Ableitung (oder Lipschitz-Bedingung bezüglich der zweiten) des betrachteten Operators enthalten.

Kapitel III S. 79 - 173

Einige Sätze zum Halley-Verfahren.

Dieser Abschnitt bildet nicht allein von seiner Stellung im Text und seinem Umfang her den eigentlichen Mittelpunkt dieser Arbeit. In ihm wird das Halley-Verfahren nicht nur mit Hilfe jener Methodik untersucht, die in Kapitel II bereits zu recht guten Ergebnissen bezüglich des Tschebyscheff-Verfahrens geführt hatte und nun hier ihre durchaus allgemeine Anwendbarkeit unter Beweis stellt; sondern es werden auch verschiedene, speziell auf das Halley-Verfahren bezogene Beweismethoden betrachtet, die in Verbindung mit einer sorgfältigen algorithmischen Auswertung der problembezogenen Informationen zu vergleichsweise guten Ergebnissen führen. Insbesondere wird gezeigt, wie man bekannte Konvergenzsätze (nicht nur über das Halley-Verfahren) allein durch eine leichte Modifikation der Beweisführung in ihren Aussagen verschärfen kann. Dies erreicht man durch eine geringfügige Änderung des in solchen Sätzen fast stets verwendeten Prinzips der vollständigen Induktion.

Kapitel IV S. 174 - 190

Einige Sätze zu Verfahren 4. und 5. Ordnung.

In diesem Abschnitt wird am Beispiel zweier spezieller Verfahren höherer Ordnung nochmals demonstriert, wie man bei der Behandlung derartiger Verfahren als "gestörtes" Newton-Verfahren zu recht einfachen Konvergenzvoraussetzungen gelangen kann.

Kapitel V S. 191 - 220

Ein Beispiel im $\mathbb{R}^3$.

Es wird ein der Praxis entnommenes und (daher) mathematisch sehr "undankbares" Beispiel betrachtet, das sich aber doch und gerade deshalb gut für einen Vergleich der in dieser Arbeit behandelten Verfahren eignet. Bei der Aufbereitung dieses Beispiels wurde besonderer Wert auf möglichst sorgfältige Abschätzungen gelegt, die überdies in einer allgemeinen, zunächst nicht auf konkrete Zahlenwerte des betrachteten

Beispiels bezogenen Form angegeben werden. Abschließend werden für verschiedene Startnäherungen die einzelnen Konvergenzsätze dieser Arbeit ausführlich miteinander verglichen. Überraschend ist das Ergebnis, daß die in Kapitel III bewiesenen Sätze für das Halley-Verfahren einen Konvergenzbereich garantieren, der um mehr als 20% größer ist als der des Newton-Verfahrens.

Kapitel VI S. 221 - 256

Ein Beispiel in Funktionenräumen.

Die spezielle Gestalt des in Kapitel V betrachteten Beispiels gestattet auch seine Behandlung als nichtlineares Vielpunkt-Randwertproblem mit nichtlinearen Randbedingungen. In dieser Form wird es hier mit Hilfe der Methode der Quasilinearisation behandelt. Auch hier wurde wieder besonderer Wert gelegt auf möglichst sorgfältige Abschätzungen. Wie bereits in Kapitel V, so erweist sich auch hier der Konvergenzbereich des Halley-Verfahrens als um rund 20% größer als der des Newton-Verfahrens.

Einleitung

Aufgabenstellung
und
Konstruktion von Lösungsverfahren

Eine große Zahl von Problemen der angewandten Mathematik läßt sich bei geeigneter Formulierung in der einheitlichen Gestalt einer Operatorgleichung behandeln. Die den Definitions- und Wertebereich des Operators bildenden strukturierten Mengen können häufig als Teilmengen ein und desselben vollständigen, normierten Vektorraumes gewählt werden. Schließlich bedeutet es keine allzu einschneidende Beschränkung in der Auswahl der hier zu betrachtenden Aufgaben, wenn man fordert, daß der zugehörige Operator gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften genügt. Somit wird sich diese Arbeit mit folgender Fragestellung beschäftigen:
Es sei B ein vollständiger, normierter Vektorraum - im weiteren kurz als Banach- oder B-Raum bezeichnet - und $M \subset B$ eine Teilmenge von B. $F:M \to B$ sei eine Abbildung von M in B, die gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen genügt. Gesucht ist eine Lösung der Gleichung

$$F(x) = \theta$$

Zu einer derartigen Operatorgleichung in Nullstellenform läßt sich stets eine äquivalente Operatorgleichung in Fixpunktform

$$T(x) = x$$

angeben und umgekehrt. Man hat nämlich

$$F(x) = \theta \quad \Leftrightarrow \quad F(x) + x =: T(x) = x$$

$$T(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad T(x) - x =: F(x) = \theta$$

Im folgenden wird daher - je nach Bequemlichkeit - der einen oder der anderen Art der beiden Darstellungen der Vorzug gegeben werden.

Zur Lösung einer Gleichung $F(x) = \theta$ mittels der Methode der sukzessiven Approximation konstruiert man nun einen Operator R mit der Eigenschaft

$$R(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \theta$$

und berechnet sodann nach Vorgabe einer geeigneten Näherungslösung x_0 die rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ gemäß

$$x_{n+1} := R(x_n)$$

Ist nun x^* Lösung der Gleichung $F(x) = \theta$, d.h. gilt $R(x^*) = x^*$, so erhält man unter gewissen Voraussetzungen

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$$

d.h. man kann mit Hilfe obiger Methode die Lösung der Gleichung beliebig genau berechnen.

Ob die Näherungsfolge $\{x_n\}$ konvergiert, ist meist abhängig von der "Güte" der Ausgangsnäherung x_o. Wie man ein geeignetes x_o findet, läßt sich allgemeingültig nicht sagen; man kann für die verschiedenen Verfahren lediglich Kriterien angeben, auf Grund derer sich entscheiden läßt, ob eine Ausgangsnäherung "gut genug" ist. Diese Kriterien möglichst einfach und leicht nachprüfbar zu gestalten, ist eines der Ziele dieser Arbeit.
Eine weitere für den Anwender wichtige Frage ist, wie "schnell" die Folge $\{x_n\}$ konvergiert, da hiervon die Zahl der erforderlichen Iterationsschritte zur Erlangung einer entsprechenden Genauigkeit der Lösung und damit in gewisser Weise der Arbeitsaufwand bei ihrer Berechnung abhängig ist. Die Konvergenzgeschwindigkeit der Approximationsfolge ist nun im allgemeinen weniger abhängig von der Wahl der Ausgangsnäherung x_o, sondern stellt vielmehr eine Eigenschaft des Operators R dar. In dieser Arbeit werden speziell solche numerischen Verfahren betrachtet, die eine sehr schnell konvergente Iterationsfolge liefern.

Zur Objektivierung des Begriffs der "Konvergenzgeschwindigkeit" einer Näherungsfolge $\{x_n\}$ dient die Definition der Konvergenzordnung: Man sagt, die Approximationsfolge $\{x_n\}$ mit $x_n \to x^*$ konvergiere von der Ordnung k (wobei k in den hier behandelten Fällen stets eine natürliche Zahl ist), wenn es eine Konstante C gibt, so daß gilt:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \|x^* - x_{n+1}\| \leq C \, \|x^* - x_n\|^K$$

Für k=1 spricht man auch von linearer, für k=2 von quadratischer und für k=3 von kubischer Konvergenz.
Gilt nicht nur wie bei der Konvergenzordnung k

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x^* - x_{n+1}\|}{\|x^* - x_n\|^K} < \infty$$

sondern sogar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x^* - x_{n+1}\|}{\|x^* - x_n\|^K} = 0$$

so spricht man für k=1 von superlinearer, für k=2 von superquadratischer und für k=3 von superkubischer Konvergenz der Approximationsfolge.

Es läßt sich nun leicht eine hinreichende Bedingung dafür angeben, daß die durch

$$x_{n+1} := R(x_n)$$

rekursiv definierte Folge mit $x_n \to x^*$ von der Ordnung k konvergiert. Ist nämlich der Operator R k-mal stetig Fréchet-differenzierbar und gilt an der Stelle der Lösung $x^* = R(x^*)$:

$$R'(x^*) = R''(x^*) = \cdots = R^{(K-1)}(x^*) = \Theta$$

so erhält man

$$\|x^* - x_{n+1}\| = \|R(x^*) - R(x_n)\|$$

$$\leq \sup_{x \in \overline{x^* x_n}} \frac{1}{k!} \|R^{(K)}(x)\| \, \|x^* - x_n\|^K$$

und damit Konvergenz von der Ordnung k.

(Dabei ist $\overline{x^*x_n} := \{x : x = x^* + t(x_n - x^*),\ t \in [0,1],\ t \in R\}$). Ist auch $R^{(k)}(x^*) = \Theta$, so erhält man sogar die Konvergenzordnung super-k, da dann wegen $x_n \to x^*$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \overline{x^*x_n}} \frac{1}{k!} \left\| R^{(k)}(x) \right\| = 0$$

Die (k+1)te Ableitung von R braucht hier nicht zu existieren.

Sofern der Operator R des Iterationsverfahrens stetig differenzierbar ist und an der Stelle der Lösung x^* gilt $\|R'(x^*)\| < 1$, so wird hierdurch garantiert, daß für ein beliebiges x_o aus einer gewissen Umgebung der Lösung x^* die durch x_o und $x_{n+1} := R(x_n)$ definierte Iterationsfolge gegen x^* konvergiert. Wegen $\|R'(x^*)\| < 1$ und der Stetigkeit von R' gibt es dann nämlich ein $r > 0$ und ein $\alpha < 1$, so daß für die Kugel

$$S_r := \{x : \|x^* - x\| \le r\}$$

um x^* gilt

$$\sup_{x \in S_r} \|R'(x)\| \le \alpha$$

Außerdem ist R auf S_r eine Selbstabbildung, da

$$\begin{aligned} x \in S_r \Rightarrow \|x^* - R(x)\| &= \|R(x^*) - R(x)\| \\ &\le \sup_{\tilde{x} \in S_r} \|R'(\tilde{x})\| \, \|x^* - x\| \\ &\le \alpha r \\ &< r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad R(x) \in S_r$$

Nach dem folgenden Banach'schen Fixpunktsatz konvergiert dann aber die durch x_o und $x_{n+1} := R(x_n)$ definierte Iterationsfolge für jedes $x_o \in S_r$.

Satz E.1 (Banach'scher Fixpunktsatz): Es sei B ein Banach-Raum und $M \subset B$ offen. $R: M \to B$ sei eine stetig im Sinne von Fréchet differenzierbare Abbildung. $S \subset M$ sei abgeschlossen und konvex und es gelte

$$\sup_{x \in S} \|R'(x)\| = \alpha < 1 \quad \text{sowie} \quad R(S) \subset S$$

Dann gilt:

(0.1) Für jedes $x_o \in S$ existiert die durch x_o und $x_{n+1} := Rx_n$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ und es gilt $x_n \in S \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(0.2) Es gibt ein $x^* \in S$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

(0.3) Es gilt $Rx^* = x^*$.

(0.4) Außer x^* existiert keine weitere Lösung der Gleichung $x = Rx$ in S.

Beweis: Wegen $R(S) \subset S$ gilt $x \in S \Rightarrow Rx \in S$. Hieraus folgt (0.1). Weiter ist

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|Rx_n - Rx_{n-1}\| \\ &\le \sup_{x \in S} \|R'(x)\| \, \|x_n - x_{n-1}\| \\ &= \alpha \, \|x_n - x_{n-1}\| \end{aligned}$$

Für beliebiges $x_o \in S$ gilt also

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_o\| &\le \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \cdots + \|x_1 - x_o\| \\ &\le (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \cdots + \alpha + 1) \, \|x_1 - x_o\| \\ &\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\right) \|x_1 - x_o\| \end{aligned}$$

Wegen $\alpha < 1$ konvergiert $\sum_{K=0}^{\infty} \alpha^K$. Also bilden die $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit von B gibt es dann ein $x^* \in B$ mit $x_n \to x^*$. Da S abgeschlossen ist und $x_n \in S \; \forall \; n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $x^* \in S$. Damit ist (0.2) bewiesen. Wegen der Stetigkeit von R gilt

$$\begin{aligned} R(x^*) &= R(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} Rx_n \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= x^* \end{aligned}$$

Damit ist (0.3) bewiesen. Sei nun $\tilde{x} = R\tilde{x}$, so gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x^*\| &= \|R\tilde{x} - Rx^*\| \\ &\leq \alpha \|\tilde{x} - x^*\| \end{aligned}$$

Wegen $\alpha < 1$ folgt hieraus $\|\tilde{x} - x^*\| = 0$, d.h. $x^* = \tilde{x}$. Damit ist (0.4) bewiesen. ■

Auf diesen einfachen Überlegungen aufbauend sollen nun einige Iterationsverfahren zur Lösung der Operatorgleichung $F(x) = \Theta$ konstruiert werden.
Um ein linear konvergentes Verfahren zu erhalten, wird man auf Grund obiger Betrachtungen für den Operator R zweckmäßiger Weise fordern

$$R(x) = x \iff F(x) = \Theta \; ; \|R'(x^*)\| < 1$$

Hierdurch wird nun der allgemeine Ansatz

$$R(x) := x + A\,F(x)$$

für R nahegelegt. Dabei ist $A : X \to X$ eine bijektive, lineare Abbildung. Die Bedingung $\|R'(x^*)\| < 1$ wird man so zu erfüllen trachten, daß man $\|R'(x_0)\|$ möglichst klein wählt, da dann wegen der Stetigkeit von R' am ehesten die Aussicht besteht, daß $\|R'(x^*)\| < 1$ gilt. Für $\|R'(x_0)\| = 0$ erhält man

$$R'(x_0) = I + A\,F'(x_0) = \Theta$$

Die Existenz von $[F'(x_0)]^{-1}$ vorausgesetzt, folgt also $A = -[F'(x_0)]^{-1}$

Somit erhält man

$$R(x) = x - [F'(x_0)]^{-1} F(x)$$

Dieser Operator eines Iterationsverfahrens mit linearer Konvergenz liefert also das modifizierte Newton-Verfahren mit der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} := x_n - [F'(x_0)]^{-1} F(x_n)$$

Ein Verfahren 2. Ordnung erhält man aus den Bedingungen

$$R(x) = x \iff F(x) = \Theta \; ; \|R'(x^*)\| = 0$$

Naheliegend ist der Ansatz

(0.5) $$R(x) := x + A(x)F(x)$$

mit einer bijektiven, linearen Abbildung $A(x)$, die sich aus der Forderung $R'(x^*) = \Theta$ bestimmen läßt.
Ein Verfahren 3. Ordnung erhält man aus den Bedingungen

$$R(x) = x \iff F(x) = \Theta \; ; \; R'(x^*) = R''(x^*) = \Theta$$

Da R hier zwei Bedingungen genügen muß, reicht der Ansatz (0.5) mit

nur einer freien Abbildung $A(x)$ nicht aus. Dies trifft dagegen zu für

$$R(x) := x + A(x)F(x) + B(x)\left[\Phi(x), F(x)\right] \tag{0.6}$$

mit einem bijektiven, linearen Operator $A(x)$ und einem bilinearen Operator $B(x)$. Während sich $A(x)$ und $B(x)$ aus den Forderungen $R'(x^*) = R''(x^*) = \Theta$ bestimmen lassen, ist man in der Wahl von $\Phi(x)$ noch frei und erhält für verschiedene $\Phi(x)$ verschiedene Iterationsverfahren. Für ein Verfahren 4. Ordnung hätte man dann noch einen trilinearen Operator $C(x)$ und zusätzliche Funktionen $\Psi(x)$, $\chi(x)$ einzuführen und erhielte so den allgemeinen Ansatz

$$\begin{aligned} R(x) := x + A(x)F(x) + B(x)\left[\Phi(x), F(x)\right] \\ + C(x)\left[\Psi(x), \chi(x), F(x)\right] \end{aligned} \tag{0.7}$$

Es sollen nun die Operatoren A und B für die Ansätze (0.5) und (0.6) bestimmt werden. Dies bereitet keine Schwierigkeiten, wenn man die folgenden Bemerkungen und den darauf aufbauenden allgemein formulierten Satz E.2 beachtet:
Sei $A_j(x): X \times X \times \cdots \times X \to X$ ein j-linearer Operator. $A_j(x)$ sowie $F_1(x), \ldots, F_j(x)$ seien Fréchet-differenzierbar. Dann ist die Abbildung

$$H(x) := A_j(x)\left[F_1(x), \ldots, F_j(x)\right]$$

Fréchet-differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} H'(x) = {} & A_j'(x)\left[F_1(x), F_2(x), \ldots, F_j(x)\right] \\ & + A_j(x)\left[F_1'(x), F_2(x), \ldots, F_j(x)\right] \\ & \vdots \\ & + A_j(x)\left[F_1(x), F_2(x), \ldots, F_j'(x)\right] \end{aligned}$$

Führt man nun das Symbol $\partial^{(n)}$ ein durch $\partial := \partial^{(1)}$ mit

$$\begin{aligned} A_j(x)\,\partial\left[F_1(x), \ldots, F_j(x)\right] &:= \partial\left\{A_j(x)\left[F_1(x), \ldots, F_j(x)\right]\right\} \\ &:= A_j'(x)\left[F_1'(x), \ldots, F_j(x)\right] \\ &\quad + A_j(x)\left[F_1(x), \ldots, F_j(x)\right] \\ &\quad \vdots \\ &\quad + A_j(x)\left[F_1(x), \ldots, F_j'(x)\right] \end{aligned}$$

sowie durch die Forderung, daß ∂ linear ist und $\partial^{(n)} := \partial\,\partial^{(n-1)}$ gilt, so kann man den Operator

$$H(x) := A_j(x)\left[F_1(x), \ldots, F_j(x)\right]$$

formal nach der Leibniz'schen Regel differenzieren (sofern nur a. e auftretenden Funktionen die entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen). Wenn man als Symbol für die n-te Ableitung nach x auch für Operatoren den Ausdruck $\frac{d^n}{dx^n}$ verwendet, so hat man also:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{A_j(x)\left[F_1(x), \ldots, F_j(x)\right]\right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_j^{(n-k)}(x)\,\partial^{(k)}\left[F_1(x), \ldots, F_j(x)\right]$$

Unter Berücksichtigung dieser Vorbemerkungen ergibt sich nun der

Satz E.2: Es seien die $A_j(x)$ für $j = 1, \ldots, n$ j-lineare Operatoren. Die $F_{jm}(x)$; $j = 1, \ldots, n$; $m = 1, \ldots, j$; seien ebenso wie die $A_j(x)$ n-mal stetig Fréchet-differenzierbar. Es sei

$$T(x) := x + \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\left[F_{j1}(x), \ldots, F_{jj}(x)\right] \tag{0.8}$$

Es gelte

(0.9) $$F_{jj}(x^*) = \theta \qquad \forall\, j = 1,\dots,n$$

(0.10) $$\sum_{j=1}^{n} A_j(x)\,\partial^{(k)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] = \begin{cases} -I & \text{für } k = 1 \\ \theta & \text{für } k = 2,\dots,n \end{cases} \qquad \forall\, x$$

(0.11) $$\lim_{x \to x^*} \| A_j^{(k)}(x) \| < \infty \qquad \text{für } k,j = 1,\dots,n$$

Dann gilt

$$\frac{d^k}{dx^k}\, T(x)\Big|_{x=x^*} = \theta \qquad \text{für } k = 1,\dots,n$$

Beweis:
Es wird zunächst gezeigt:

(0.12) Für $i,k \geq 1$, $i+k \leq n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(i)}(x)\,\partial^{(k)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] = \theta$$

Dieser Beweis wird geführt, indem man die Behauptungen

$(B)_i$ Für $i,k \geq 1$, $i+k \leq n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(i)}(x)\,\partial^{(k)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] = \theta$$

sukzessive für $i = 1,2,\dots,n-1$ beweist.

$i = 1$: Aus (0.10) folgt für $k = 1,\dots,n-1$

(0.13)
$$\begin{aligned} \theta &= \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\,\partial^{(k)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_j^{(1)}(x)\,\partial^{(k)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] \\ &\quad + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} A_j(x)\,\partial^{(k+1)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right]}_{= \theta \text{ nach (0.10), da } k+1 \geq 2} \end{aligned}$$

Daraus folgt $(B)_1$.

Sei nun $(B)_i$ für $i = 1,\dots,m-1$ bereits bewiesen.

Dann gilt für $i = m \leq n-1$ nach (0.10):

(0.14) Für $k = 1,\dots,n-m$ gilt

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{d^m}{dx^m} \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\,\partial^{(k)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} A_j^{(m-l)}(x)\,\partial^{(k+l)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] \\ &= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \sum_{j=1}^{n} A_j^{(m-l)}(x)\,\partial^{(k+l)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_j^{(m)}(x)\,\partial^{(k)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] \end{aligned}$$

Denn:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(m-l)}(x)\,\partial^{(k+l)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] = \theta$$

für $l = 1,\dots,m$ nach (0.10) und $(B)_1 - (B)_{m-1}$.
Damit ist (0.12) bewiesen.

Man erhält nun für $k = 1,\dots,n$:

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}\,(T(x) - x) &= \frac{d^k}{dx^k} \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\left[F_{1j}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A_j^{(k-l)}(x)\,\partial^{(l)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] \\ &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \sum_{j=1}^{n} A_j^{(k-l)}(x)\,\partial^{(l)}\left[F_{j1}(x),\dots,F_{jj}(x)\right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_j^{(K)}(x)\left[F_{j_1}(x),\ldots,F_{j_j}(x)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\,\partial^{(K)}\left[F_{j_1}(x),\ldots,F_{j_j}(x)\right] \qquad \text{wegen (0.12)}$$

Hieraus folgt unter Beachtung von (0.10):

$$\frac{d^K}{dx^K}\,T(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(K)}(x)\left[F_{j_1}(x),\ldots,F_{j_j}(x)\right]$$

oder

$$\left\|\frac{d^K}{dx^K}\,T(x)\right\| \le \sum_{j=1}^{n} \|A_j^{(K)}(x)\|\,\|F_{j_1}(x)\|\cdots\|F_{j_j}(x)\|$$

Wegen (0.11) und (0.9) folgt hieraus

$$\left\|\frac{d^K}{dx^K}\,T(x^*)\right\| = 0$$

Dies ist aber die Behauptung. ■

Dieser Satz besagt nun:
Für den Operator

$$R(x) := x + A(x)F(x)$$

wird die Bedingung $R'(x^*) = \Theta$ bereits erfüllt, wenn gilt

(0.15) $$A(x)\,\partial F(x) = -I$$

Und für den Operator

$$R(x) := x + A(x)F(x) + B(x)\left[\Phi(x),F(x)\right]$$

werden die Bedingungen $R'(x^*) = R''(x^*) = \Theta$ erfüllt, wenn gilt

(0.16) $$A(x)\;\partial F(x) + B(x)\;\partial\left[\Phi(x),F(x)\right] = -I$$
$$A(x)\,\partial^{(2)}F(x) + B(x)\,\partial^{(2)}\left[\Phi(x),F(x)\right] = \Theta$$

Dabei bedeutet (0.15):

(0.17) $$A(x)F'(x) = -I$$

Und (0.16) bedeutet:

(0.18) $$A(x)F'(x) + B(x)\left[\Phi'(x),F(x)\right] + B(x)\left[\Phi(x),F'(x)\right] = -I$$
$$A(x)F''(x) + B(x)\left[\Phi''(x),F(x)\right] +$$
$$+ 2\,B(x)\left[\Phi'(x),F'(x)\right] + B(x)\left[\Phi(x),F''(x)\right] = \Theta$$

Ausführlich geschrieben bedeutet hierbei das "Gleichungssystem" (0.

(0.19) Für alle x soll gelten

$$A(x)F'(x)(y) + B(x)\left[\Phi'(x)(y),F(x)\right] + B(x)\left[\Phi(x),F'(x)(y)\right] = -I$$
$$A(x)F''(x)(y,z) + B(x)\left[\Phi''(x)(y,z),F(x)\right] +$$
$$+ 2\,B(x)\left[\Phi'(x)(y),F'(x)(z)\right] + B(x)\left[\Phi(x),F''(x)(y,z)\right] = \Theta$$

identisch in y und z.

Falls $[F'(x)]^{-1}$ existiert, erhält man aus (0.17) sofort

$$A(x) = -[F'(x)]^{-1}$$

und damit

$$R(x) = x - [F'(x)]^{-1}F(x)$$

Dieser Operator eines Iterationsverfahrens mit quadratischer Konver-

genz liefert also das Newton-Verfahren mit der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n)$$

Um (0.18) bzw. (0.19) auszuwerten, muß man $\Phi(x)$ spezifizieren. Für $\Phi(x) := F(x)$ erhält man

$$(0.20) \quad A(x)F'(x) + 2\,B(x)[F'(x), F(x)] = -I$$

$$A(x)F''(x) + 2\,B(x)[F''(x), F(x)] + 2\,B(x)[F'(x), F'(x)] = 0$$

Wenn $[F'(x)]^{-1}$ existiert, so ist eine Lösung dieses "Gleichungssystems":

$$(0.21) \quad A(x)(y) = -[F'(x)]^{-1}(y) - [F'(x)]^{-1} F''(x)\left[[F'(x)]^{-1} F(x), [F'(x)]^{-1}(y)\right]$$

$$B(x)(y,z) = \tfrac{1}{2}\,[F'(x)]^{-1} F''(x)\left[[F'(x)]^{-1}(y), [F'(x)]^{-1}(z)\right]$$

$$\bigvee y,z$$

Für den Operator R erhält man also in diesem Fall:

$$R(x) = x - [F'(x)]^{-1} F(x) - \tfrac{1}{2}\,[F'(x)]^{-1} F''(x)\left[[F'(x)]^{-1} F(x), [F'(x)]^{-1} F(x)\right]$$

Dies ist das Tschebyscheff-Verfahren mit der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{2}\,[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)\left[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\right]^{(2)}$$

Setzt man in (0.18) bzw. (0.19) $\Phi(x) := x$, so erhält man

$$(0.22) \quad A(x)F'(x) + B(x)[I, F(x)] + B(x)[x, F'(x)] = -I$$

$$A(x)F''(x) + 2\,B(x)[I, F'(x)] + B(x)[x, F''(x)] = 0$$

Eine Lösung dieses "Gleichungssystems" ist, wenn $[F'(x)]^{-1}$ existiert:

$$(0.23) \quad A(x)(y) = -\left[I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)\left[[F'(x)]^{-1} F(x), I\right]\right]^{-1} \cdot \left[[F'(x)]^{-1}(y) + \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)\left[x, [F'(x)]^{-1}(y)\right]\right]$$

$$B(x)(y,z) = \left[I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)\left[[F'(x)]^{-1} F(x), I\right]\right]^{-1} \cdot \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)\left[y, [F'(x)]^{-1}(z)\right]$$

$$\bigvee y,z$$

Für den Operator R erhält man also in diesem Falle:

$$R(x) = x - \left[I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)\,[F'(x)]^{-1} F(x)\right]^{-1} [F'(x)]^{-1} F(x)$$

Dies ist das Halley-Verfahren mit der Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} := x_n - \left[I - \tfrac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)\,[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\right]^{-1} [F'(x_n)]^{-1} F(x_n)$$

Das Newton-, Tschebyscheff- und Halley-Verfahren sind in mancherlei Hinsicht sehr eng miteinander verwandt. So kann man das Tschebyscheff-Verfahren als ein korrigiertes Newton-Verfahren mit dem Korrekturterm

$$-\tfrac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)\left[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\right]^{(2)}$$

betrachten. Diese Verwandtschaft wird noch deutlicher, wenn man auf jeden Newton-Schritt einen modifizierten Newton-Schritt folgen läßt. Man erhält dann nämlich durch abgebrochene Reihenentwicklung:

$$x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n))$$

$$\approx x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - [F'(x_n)]^{-1} \cdot \left\{F(x_n) - [F'(x_n)][F'(x_n)]^{-1} F(x_n) + \tfrac{1}{2}\,F''(x_n)\left[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\right]^{(2)}\right\}$$

$$= x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)}$$

Diese Zusammenhänge gelten in analoger Weise auch für das Halley-Verfahren, denn wenn man bei diesem die Inverse

$$\left[I - \tfrac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\right]^{-1}$$

in eine Reihe entwickelt und nach dem linearen Glied abbricht, erhält man gerade das Tschebyscheff-Verfahren, das somit auch als ein vereinfachtes Halley-Verfahren betrachtet werden kann:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= x_n - \left[I - \tfrac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\right]^{-1} [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \\ &= x_n - \left\{I + \tfrac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) + \cdots\right\}[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \\ &\approx x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)} \end{aligned}$$

Auf diesem und ähnlichen Zusammenhängen basieren viele Beweise dieser Arbeit.

Eine andere Herleitung für Iterationsverfahren ergibt sich aus dem Ansatz einer abgebrochenen Taylorreihe. Um ein x^* mit $F(x^*) = \theta$ zu bestimmen, geht man aus von einem x_n und setzt

$$F(x^*) = \theta \approx F(x_n) + F'(x_n)(x^* - x_n)$$

d.h. man berechnet aus

$$F_n + F_n' c_n = \theta \quad ; \quad F_n := F(x_n) \;,\; F_n' := F'(x_n)$$

die Korrektur c_n und erhält $x_{n+1} := x_n + c_n$ als nächste Näherung. Dieser Ansatz liefert das Newton-Verfahren.
Entwickelt man die Taylorreihe bis zum quadratischen Glied, so muß man eine Korrektur bereits vorgeben, um noch eine lineare Gleichung zu erhalten. Hierfür verwendet man meistens die aus dem Newton-Verfahren berechnete Korrektur. Der Ansatz

$$\begin{aligned} F_n + F_n' c_n &= \theta \\ F_n + F_n' t_n + \tfrac{1}{2} F_n'' c_n^{(2)} &= \theta \\ x_{n+1} &:= x_n + t_n \end{aligned}$$

liefert dabei das Tschebyscheff-Verfahren. Der Ansatz

$$\begin{aligned} F_n + F_n' c_n &= \theta \\ F_n + F_n' d_n + \tfrac{1}{2} F_n''(d_n, c_n) &= \theta \\ x_{n+1} &:= x_n + d_n \end{aligned}$$

liefert das Halley-Verfahren.
Im Gegensatz zu den oben angegebenen Herleitungen kann man aus diesen Herleitungen die Konvergenzordnung der Verfahren allenfalls erahnen. Lediglich beim Halley-Verfahren kann man durch geeignete Umformungen erkennen, daß es sich beinahe um eine Taylorentwicklung bis zum quadratischen Glied handelt. Löst man nämlich die Gleichung

$$F_n + F_n' d_n + \tfrac{1}{2} F_n''(d_n, c_n) = \theta \tag{0.24}$$

unter Verwendung von $F_n + F_n' c_n = \theta$ nach c_n auf, so erhält man

$$c_n = d_n + \tfrac{1}{2}\left[I - \tfrac{1}{2}[F_n']^{-1} F_n'' d_n\right]^{-1} [F_n']^{-1} F_n'' d_n^{(2)}$$

Setzt man diesen Ausdruck für c_n in (0.24) ein, so folgt

$$F_n + F_n' d_n + \tfrac{1}{2} F_n'' d_n^{(2)} + o(d_n^{(2)}) = \theta$$

wobei

$$\Psi(d_n) = o(d_n^{(2)}) \;:\Leftrightarrow\; \lim_{d_n \to \theta} \frac{\|\Psi(d_n)\|}{\|d_n\|^2} = 0$$

Auch auf diesem Zusammenhang beruht ein Beweis dieser Arbeit.

Will man analog zum Tschebyscheff-Verfahren ein Verfahren 4. Ordnung konstruieren, so hätte man in der Iterationsvorschrift die dritte Ableitung der Funktion zu berechnen, denn man erhielte:

$$
\begin{aligned}
(0.25) \qquad & F_n + F_n' \, c_n = 0 \\
& F_n + F_n' \, t_n + \tfrac{1}{2} F_n'' \, c_n^{(2)} = 0 \\
& F_n + F_n' \, r_n + \tfrac{1}{2} F_n'' \, t_n^{(2)} + \tfrac{1}{6} F_n''' \, t_n^{(3)} = 0 \\
& x_{n+1} := x_n + r_n
\end{aligned}
$$

Da die Berechnung der dritten Ableitung eines Operators oft schon erhebliche Schwierigkeiten bereitet, liegt es nahe, nach Verfahren höherer Ordnung zu suchen, die diese Berechnung vermeiden. Hier wird man versuchen, den Ansatz (0.25) wenigstens ungefähr zu erhalten, indem man setzt

$$
\begin{aligned}
& F_n + F_n' \, c_n = 0 \\
& F_n + F_n' \, t_n + \tfrac{1}{2} F_n'' \, c_n^{(2)} = 0 \\
& F_n + F_n' \, r_n + \tfrac{1}{2} F''(x_n + \tfrac{1}{3} t_n) \, t_n^{(2)} = 0 \\
& x_{n+1} := x_n + r_n
\end{aligned}
$$

Hier ist nämlich

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} F''(x_n + \tfrac{1}{3} t_n) \, t_n^{(2)} &= \tfrac{1}{2} F''(x_n) \, t_n^{(2)} + \tfrac{1}{6} F'''(x_n) \, t_n^{(3)} + \cdots \\
&\approx \tfrac{1}{2} F''(x_n) \, t_n^{(2)} + \tfrac{1}{6} F'''(x_n) \, t_n^{(3)}
\end{aligned}
$$

Neben diesem Verfahren, das unter gewissen Voraussetzungen über die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen tatsächlich von 4. Ordnung konvergiert, wird in dieser Arbeit schließlich noch ein analog konstruiertes Verfahren 5. Ordnung betrachtet, dessen Iterationsvorschrift ebenfalls nur Ableitungen bis zur Ordnung 2 enthält.

Als letzte Herleitung für Iterationsverfahren sei endlich noch die abgebrochene Taylorentwicklung der Umkehrfunktion des betrachteten Operators um den Funktionswert an der Startstelle erwähnt.
Zur Lösung der Gleichung $F(x) = \theta$ mit der Lösung x^* setzt man:

$$
\begin{aligned}
x^* &= F^{-1}(\theta) \\
&= F^{-1}(y) + [F^{-1}(y)]' (\theta - y) + \tfrac{1}{2} [F^{-1}(y)]'' (\theta - y)^{(2)} + \cdots
\end{aligned}
$$

Man berücksichtigt nun:

$$
[F^{-1}(y)]' = [F'(F^{-1}(y))]^{-1}
$$

Weiter ist für invertierbare lineare Operatoren $U: X \to X$ die Abbildung

$$
\Psi(U) := U^{-1}
$$

Fréchet-differenzierbar, und es gilt für beliebiges lineares, invertierbares $V: X \to X$

$$
\Psi'(U)V = - U^{-1} V \, U^{-1}
$$

Also hat man unter zusätzlicher Berücksichtigung der Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
[F^{-1}(y)]'' &= \{[F^{-1}(y)]'\}' \\
&= \{[F'(F^{-1}(y))]^{-1}\}' \\
&= \{\Psi(F'(F^{-1}(y)))\}' \\
&= \Psi'(F'(F^{-1}(y))) \, F''(F^{-1}(y)) [F^{-1}(y)]'
\end{aligned}
$$

$$= -\left[F'(F^{-1}(y))\right]^{-1} F''(F^{-1}(y))\left[\left[F'(F^{-1}(y))\right]^{-1}, \left[F'(F^{-1}(y))\right]^{-1}\right]$$

Also:

$$x^* = F^{-1}(y) - \left[F'(F^{-1}(y))\right]^{-1} y - \\ - \tfrac{1}{2}\left[F'(F^{-1}(y))\right]^{-1} F''(F^{-1}(y))\left[\left[F'(F^{-1}(y))\right]^{-1} y, \left[F'(F^{-1}(y))\right]^{-1} y\right] + \cdots$$

Die Entwicklung um den Funktionswert an der Startstelle, d.h. um

$$y := F(x)$$

liefert also:

$$x^* = x - \left[F'(x)\right]^{-1} F(x) - \tfrac{1}{2}\left[F'(x)\right]^{-1} F''(x)\left[\left[F'(x)\right]^{-1} F(x)\right]^{(2)} + \cdots$$

Bricht man nach dem linearen Glied ab, so erhält man das Newton-Verfahren. Bricht man nach dem quadratischen Glied ab, so erhält man das Tschebyscheff-Verfahren.

Ergänzungen: Im Banach'schen Fixpunktsatz (Satz E.1) genügt es, statt der stetigen Differenzierbarkeit von R mit $\sup\|R'(x)\| = \alpha < 1$ die Lipschitz-Stetigkeit von R mit

$$(0.26) \quad \|R(x_1) - R(x_2)\| \le \alpha \|x_1 - x_2\| \quad \forall\, x_1, x_2 \in S\,, \quad \alpha < 1$$

zu fordern. Der Beweis verläuft dann völlig analog.
Es genügt sogar die Forderung

$$(0.27) \quad \|R(x_1) - R(x_2)\| \le K\|x_1 - x_2\| + \beta\{\|R(x_1) - x_1\| + \|R(x_2) - x_2\|\}$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in S\,, \quad \alpha := K + 2\beta < 1$$

wobei R nicht einmal stetig sein muß.

Denn $K + 2\beta < 1 \Rightarrow K + \beta < 1 - \beta \Rightarrow \frac{K+\beta}{1-\beta} < 1$. Außerdem gilt:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Rx_n - Rx_{n-1}\| \\ \le K\|x_n - x_{n-1}\| + \beta\{\|Rx_n - x_n\| + \|Rx_{n-1} - x_{n-1}\|\} \\ = K\|x_n - x_{n-1}\| + \beta\|Rx_n - Rx_{n-1}\| + \beta\|x_n - x_{n-1}\|$$

d.h.

$$(1-\beta)\|Rx_n - Rx_{n-1}\| \le (K+\beta)\|x_n - x_{n-1}\|$$

Somit folgt die für den Beweis von Satz E.1 wichtige Beziehung

$$\|Rx_n - Rx_{n-1}\| \le \frac{K+\beta}{1-\beta}\|x_n - x_{n-1}\| \text{ mit } \frac{K+\beta}{1-\beta} < 1.$$

Analog zur Herleitung des modifizierten Newton-Verfahrens aus

$$R(x) = x + A\,F(x) \quad \text{und} \quad \|R'(x_0)\| = 0$$

kann man weitere Verfahren erster Ordnung konstruieren durch den Ansatz

$$R(x) = x + A\,F(x) + B\left[\Phi(x), F(x)\right]\,, \quad \|R'(x_0)\| = \|R''(x_0)\| = 0$$

Analog zur Herleitung der Verfahren höherer Ordnung ist hierbei A linear, B bilinear. Die Abbildungen sind in diesem Falle jedoch von x unabhängig. Wählt man hier z.B. $\Phi(x) = x$, so erhält man ähnlich wie bei der Herleitung des Halley-Verfahrens:

$$(0.28) \quad R(x) = x - \left[I - \tfrac{1}{2} F_0'^{-1} F_0'' F_0'^{-1} F_0\right]^{-1} F_0'^{-1} F(x) + \\ + \tfrac{1}{2}\left[I - \tfrac{1}{2} F_0'^{-1} F_0'' F_0'^{-1} F_0\right]^{-1} F_0'^{-1} F_0''(F_0'^{-1} F(x), (x - x_0))$$

Dies ist das von Safiev in [9] betrachtete modifizierte Halley-Verfahren. Die von Döring in [4] geäußerte Meinung, daß man statt derartiger "modifizierter Verfahren höherer Ordnung" auch gleich das modifizierte Newton-Verfahren verwenden könne, da (0.28) auch nur linear

konvergiert, ist jedoch nur bedingt richtig: Beim modifizierten Newton-Verfahren gilt nämlich lediglich $\| R'(x_0) \| = 0$, während beim modifizierten Halley-Verfahren gilt $\| R'(x_0) \| = 0$ und $\| R''(x_0) \| = 0$. Man kann daher also vermuten, daß für den Operator (0.28) $\| R'(x) \| < 1$ für einen i.a. größeren Bereich gilt, als dies beim modifizierten Newton-Verfahren der Fall ist. Es ist daher für (0.28) auch ein i.a. größerer Konvergenzbereich zu erwarten. Außerdem ist die Konvergenzgeschwindigkeit eines linearen Verfahrens abhängig von $\| R'(x) \|$. Je kleiner diese Größe ist, umso schnellere Konvergenz kann man erwarten. (0.28) wird also i.a. auch schneller konvergieren als das modifizierte Newton-Verfahren.

Literatur:

[1] Ade, H. — Iterationsverfahren höherer Ordnung in Banach-Räumen. Num. Math. 13 (1969), 39 - 50

[2] Collatz, L. — Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen. Arch. Rat. Mech. Anal. 2 (1958/1959), 66 - 75.

[3] Deimling, K. — Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade. Springer-Verlag. Berlin / Heidelberg / New York. 1974

[4] Döring, B. — Einige Sätze über das Verfahren der tangierenden Hyperbeln in Banach-Räumen. Aplikace Matematiky 15 (1970), 419 - 464.

[5] Ehrmann, H. — Konstruktion und Durchführung von Iterationsverfahren höherer Ordnung. Arch. Rat. Mech. Anal. 4 (1959/1960), 65 - 88.

[6] Henrici, P. — Elemente der numerischen Analysis I. Bibliographisches Institut. Mannheim / Wien / Zürich. 1972

[7] Isaacson, E. Keller, H. B. — Analyse numerischer Verfahren. Harri Deutsch. Zürich / Frankfurt. 1973

[8] Lang, S. — Analysis II Addison-Wesley. Reading / Mass. 1969

[9] Safiev, R. A. — Eine Modifikation der Methode der tangierenden Hyperbeln. (Russ) AN Azerbaidzan. SSR Dokl. 19 (1963), 3 - 8.

[10] Schröder, E. — Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Math. Ann. 2 (1870), 317 - 365.

Kapitel I

Newton-Verfahren,
modifiziertes Newton-Verfahren
und
gemischtes Newton-Verfahren

Das wohl bekannteste, am häufigsten variierte, am besten untersuchte und zugleich älteste Verfahren der numerischen Mathematik ist das Newton-Verfahren. Interessant ist hierbei, daß dieses Verfahren schon lange Zeit vor der Entwicklung der Differentialrechnung durch Leibnitz und Newton zur Lösung spezieller Aufgaben verwendet wurde. So ist die auf Heron (100 n. Chr.) zurückgehende Methode zur Berechnung der Quadratwurzel $\sqrt{a}$ einer Zahl nach dem Schema

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

das Newton-Verfahren angewandt auf die Gleichung $f(x) := x^2 - a = 0$. Die bereits den Babyloniern (2000 v. Chr.) bekannte Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

ist der erste Schritt des Newton-Verfahrens angewandt auf $f(x) := x^2 - (a^2 + b)$ mit dem Startwert $x_0 := a$.

Die in diesem Kapitel angegebenen Sätze zum Newton-Verfahren und einigen seiner Varianten haben zwar auch eine eigenständige Bedeutung; sie dienen im Rahmen dieser Arbeit jedoch im wesentlichen zur Bereitstellung von Aussagen und Zusammenhängen, die für die Beweise der in den folgenden Kapiteln angegebenen Sätze benötigt werden. Daneben mag man jedoch das Newton-Verfahren auch als den Maßstab betrachten, an dem die im folgenden behandelten Iterationsverfahren höherer Ordnung zu messen sind, sowohl was die Einfachheit ihrer Konvergenzvoraussetzungen als auch ihre numerische Brauchbarkeit anbetrifft.

Für den hier angegebenen Satz über das Newton-Verfahren, ebenso wie für alle folgenden Sätze, ist das Banach-Lemma von grundlegender Bedeutung. Es soll daher kurz zitiert werden.

Satz I.1 (Banach-Lemma): Sei X ein Banach-Raum und $U: X \to X$ ein linearer, stetiger Operator. Gilt $\|U\| \leq \mu < 1$, so existiert $(I - U)^{-1}$ mit

$$\|(I - U)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \mu}$$

Beweis: Wegen $\|U\| < 1$ konvergiert die Reihe $I + U + U^2 + \cdots$. Wegen

$$(I - U)(I + U + \quad + U^n) = I - U^{n+1}$$

folgt

$$(I - U)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} U^i$$

woraus sich wegen $\mu < 1$ dann unmittelbar die Behauptung ergibt.

Satz I.2 (über das Newton-Verfahren): Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\eta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq \beta_0 \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \leq \eta_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \| x - x_0 \| \leq 2\eta_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \eta_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

Dann gilt:

(1.1) Die durch x_0 und $x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

(1.2) Es gilt $F(x^*) = \theta$.

(1.3) Die Gleichung $F(x) = \theta$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis:

(A) Es wird zunächst gezeigt, daß die durch β_0, η_0, μ_0, sowie

(1.4) $$\mu_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\mu_n^2}{(1-\mu_n)^2}$$

(1.5) $$\beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1-\mu_n}$$

(1.6) $$\eta_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\mu_n}{1-\mu_n}\,\eta_n$$

rekursiv definierten Folgen $\{\mu_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\eta_n\}$ existieren und daß gilt

(1.7) $$\mu_n \geq 0 \ ; \ \beta_n \geq 0 \ ; \ \eta_n \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\mu_{n+1} \leq \mu_n \ ; \ \eta_{n+1} \leq \tfrac{1}{2}\eta_n \ ; \ \beta_n K_2 \eta_n = \mu_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Denn: Nach den Voraussetzungen des Satzes gilt $0 \leq \mu_0 \leq \frac{1}{2}$. Gelte nun $0 \leq \mu_n \leq \frac{1}{2}$, so ist $\mu_{n+1} \geq 0$ und

$$\mu_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\mu_n}{(1-\mu_n)^2}\,\mu_n \leq \mu_n \leq \tfrac{1}{2}$$

Damit sind die Behauptungen für $\{\mu_n\}$ bewiesen. Hieraus folgen unmittelbar die Behauptungen für $\{\beta_n\}$, da $\beta_0 \geq 0$. Wegen $\eta_0 \geq 0$ und

$$\eta_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\mu_n}{1-\mu_n}\,\eta_n \leq \tfrac{1}{2}\eta_n$$

gelten die Behauptungen auch für $\{\eta_n\}$. Nach der Definition von μ_0 gilt $\mu_0 = \beta_0 K_2 \eta_0$. Sei $\mu_n = \beta_n K_2 \eta_n$ für ein bestimmtes n, so gilt

$$\mu_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\mu_n^2}{(1-\mu_n)^2} = \frac{\beta_n}{1-\mu_n} K_2 \frac{\frac{1}{2}\mu_n}{1-\mu_n}\eta_n = \beta_{n+1} K_2 \eta_{n+1}$$

Damit ist (A) bewiesen.

(B) Es wird durch vollständige Induktion nach n gezeigt:

(Ind 1)$_n$ $F_n'^{-1}$ existiert und es gilt $\| F_n'^{-1} \| \leq \beta_n$

(Ind 2)$_n$ $x_{n+1} \in S_0$

(Ind 3)$_n$ $\| x_{n+1} - x_n \| = \| F_n'^{-1} F_n \| \leq \eta_n$ sowie $\| F_n'^{-1} \| \| F_n \| \leq \eta_n$ für $n \geq 1$

Dabei ist: $F_n := F(x_n)$; $F_n' := F'(x_n)$; $F_n'^{-1} := [F'(x_n)]^{-1}$

Denn: Die Induktionsverankerung folgt aus den Voraussetzungen des Satzes.
Schluß von n auf n+1 :
Wegen $(\text{Ind } 2)_n$ gilt $x_{n+1} \in S_0$. Wegen $(\text{Ind } 1)_n$, $(\text{Ind } 3)_n$ gilt

$$\| F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']\| \leq \beta_n K_2 \varepsilon_n = \mu_n \leq \tfrac{1}{2}$$

Also existiert nach $(\text{Ind } 1)_n$ und dem Banach-Lemma (Satz I.1)

$$F_{n+1}'^{-1} = [I - F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']]^{-1} F_n'^{-1}$$

und es gilt

$$\| F_{n+1}'^{-1}\| \leq \frac{\beta_n}{1 - \mu_n} = \beta_{n+1} \tag{1.8}$$

Daraus folgt $(\text{Ind } 1)_{n+1}$.
Wegen

$$\| F_{n+1}\| = \| F_{n+1} - F_n - F_n'(x_{n+1} - x_n)\| \leq \tfrac{1}{2} K_2 \| x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \tfrac{1}{2} K_2 \varepsilon_n^2 \tag{1.9}$$

wobei die letzte Ungleichung aus $(\text{Ind } 3)_n$ folgt, gilt mit (1.8)

$$\| x_{n+2} - x_{n+1}\| = \| F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}\| \leq \| F_{n+1}'^{-1}\| \, \| F_{n+1}\| \leq \frac{\frac{1}{2}\mu_n}{1 - \mu_n} \varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} \tag{1.9b}$$

Daraus folgt $(\text{Ind } 3)_{n+1}$.
Wegen $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \leq 2 \varepsilon_0 \tag{1.10}$$

und

$$\| x_{n+2} - x_0\| \leq \sum_{k=0}^{n+1} \| x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \leq 2 \varepsilon_0$$

Daraus folgt $(\text{Ind } 2)_{n+1}$. Damit ist (B) bewiesen.
Wegen (1.10) bilden die $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, gibt es ein x^* mit $x_n \to x^*$. Da S_0 abgeschlossen ist, gilt $x^* \in S_0$ wegen $x_n \in S_0 \; \forall n$. Daraus folgt (1.1).
Wegen (1.9), der Stetigkeit von F und der Stetigkeit der Norm sowie wegen (1.10) folgt für $n \to \infty$: $F(x^*) = \theta$. Daraus folgt (1.2).
Zum Beweis von (1.3) werde angenommen, es gäbe ein $\tilde{x} \in S_0$, $\tilde{x} \neq x^*$ mit $F(\tilde{x}) = \theta$. Es wird nun durch vollständige Induktion nach n gezeigt, daß

$$\| \tilde{x} - x_n\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2^{n-1}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

woraus der Widerspruch $x_n \to \tilde{x}$ folgt. Die Induktionsverankerung folgt aus $\tilde{x} \in S_0$. Schluß von n auf n+1 :

$$\| \tilde{x} - x_{n+1}\| = \| F_n'^{-1} F_n + \tilde{x} - x_n\| \leq \beta_n \| F_n + F_n'(\tilde{x} - x_n) - F(\tilde{x})\|$$

$$\leq \beta_n \tfrac{1}{2} K_2 \| \tilde{x} - x_n\|^2 \leq \beta_n \tfrac{1}{2} K_2 \frac{\varepsilon_0^2}{2^{2n-2}} \leq \frac{\varepsilon_0}{2^n}$$

denn aus (1.5) und $\mu_n \leq \frac{1}{2}$ erhält man $\beta_n \leq 2^n \beta_0$.
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Es soll nun noch die Konvergenzordnung des Newton-Verfahrens untersucht werden. Dabei wird der folgende Satz I.3 zeigen, daß das Newton-Verfahren unter gewissen Voraussetzungen eine quadratische Konvergenzordnung besitzt. Es sind aber auch Fälle bekannt, in denen das Newton-Verfahren lediglich linear konvergiert, so z.B. für die Funktion $f(x) := x^2$. Hat man jedoch bei Verwendung der Bezeichnungsweise des Satzes über das Newton-Verfahren nicht nur $\beta_0 K_2 \varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}$, sondern $\mu_0 < \frac{1}{2}$, so ist die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens stets garantiert, denn dann gilt für beliebiges $x \in S_0$:

$$\| [F'(x)]^{-1} \| \leq \frac{\| [F'(x_0)]^{-1} \|}{1 - \| [F'(x_0)]^{-1} \| \; K_2 \| x - x_0 \|} \leq \frac{\beta_0}{1 - 2\mu_0}$$

Dies folgt aus dem Banach-Lemma unter Berücksichtigung von $\| x - x_0 \| \leq 2\delta_0$ für $x \in S_0$ und $2\mu_0 < 1$. Damit ist dann aber die gleichmäßige Beschränktheit der $\| [F'(x_n)]^{-1} \|$ garantiert. Zusammen mit dem folgenden Satz ergibt sich hieraus die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens.

Satz I.3: Sei X ein Banach-Raum und $S \subset X$ offen und konvex. $F: S \to X$ sei auf S zweimal stetig Fréchet-differenzierbar mit

$$\sup_{x \in S} \| F''(x) \| \leq K_2$$

Die durch $x_0 \in S$ und $x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiere und es gelte $x_n \in S \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n \to \infty} x_n = x^* \in S$ und $F(x^*) = \Theta$. Die Inversen $[F'(x_n)]^{-1}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt. Dann konvergiert die Folge $\{x_n\}$ von der Ordnung 2.

Beweis:
$$\begin{aligned} \| x^* - x_{n+1} \| &= \| x^* - x_n + [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \| \\ &\leq \| [F'(x_n)]^{-1} \| \; \| F(x_n) + F'(x_n)[x^* - x_n] \| \\ &= \| [F'(x_n)]^{-1} \| \; \| F(x_n) + F'(x_n)[x^* - x_n] - F(x^*) \| \\ &\leq \| [F'(x_n)]^{-1} \| \; \tfrac{1}{2} K_2 \| x^* - x_n \|^2 \end{aligned}$$

Mit der gleichmäßigen Beschränktheit der $[F'(x_n)]^{-1} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ folgt hieraus die Behauptung. ■

Leichter als für andere Verfahren lassen sich für das Newton-Verfahren recht gute Fehlerabschätzungen für die berechneten Näherungswerte der gesuchten Lösung angeben. Es soll zunächst eine Fehlerschranke betrachtet werden, die einen analytischen Ausdruck darstellt; anschließend wird dann die Möglichkeit rekursiv definierter Ausdrücke behandelt.
Die folgende a-posteriori-Schranke für das Newton-Verfahren wurde erstmals von Döring in [1] angegeben.

Satz I.4: Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen des Satzes I.2 (über das Newton-Verfahren) gilt:

$$(1.11) \quad \| x^* - x_n \| \leq \frac{\beta_n K_2}{1 + \sqrt{1 - 2\mu_n}} \| x_n - x_{n-1} \|^2 \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

Beweis:
Mit
$$\lambda_n := \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2\mu_n}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\mu_n}}{\mu_n} \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$
sowie (1.4) und (1.6) gilt

$$\delta_n \lambda_n = \tfrac{1}{2} \frac{\mu_{n-1} \delta_{n-1}}{1 - \mu_{n-1}} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_{n-1}}{1 - \mu_{n-1}} \right)^2}} = \delta_{n-1} \frac{1 - \mu_{n-1} - \sqrt{1 - 2\mu_{n-1}}}{\mu_{n-1}}$$

$$= \delta_{n-1} \lambda_{n-1} - \delta_{n-1}$$

d.h.
$$\delta_{n-1} = \delta_{n-1} \lambda_{n-1} - \delta_n \lambda_n$$
Damit folgt

$$x_{n+p} - x_n \le \sum_{\nu=0}^{p-1} \sigma_{n+\nu} = \sum_{\nu=0}^{p-1} \sigma_{n+\nu}\alpha_{n+\nu} - \sum_{\nu=1}^{p} \sigma_{n+\nu}\alpha_{n+\nu} = \sigma_n\alpha_n - \sigma_{n+p}\alpha_{n+p}$$

Wegen $\alpha_n \le 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ folgt für $n \to \infty$ mit (1.9),(1.9b) die Behauptung:

$$(1.12) \qquad \|x^* - x_n\| \le \frac{2\sigma_n}{1 + \sqrt{1 - 2\mu_n}} \le \frac{\beta_n K_2}{1 + \sqrt{1 - 2\mu_n}} \|x_n - x_{n-1}\|^2$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Anmerkung: Ersetzt man in der obigen Fehlerschranke β_n, μ_n unter Berücksichtigung von (1.4) und (1.5) durch β_{n-1}, μ_{n-1}, so erhält man

$$\|x^* - x_n\| \le \frac{\frac{\beta_{n-1}}{1 - \mu_{n-1}} K_2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_{n-1}}{1 - \mu_{n-1}}\right)^2}} \|x_n - x_{n-1}\|^2$$

$$= \frac{\beta_{n-1} K_2}{1 - \mu_{n-1} + \sqrt{1 - 2\mu_{n-1}}} \|x_n - x_{n-1}\|^2$$

$$\le \frac{\mu_{n-1}}{1 - \mu_{n-1} + \sqrt{1 - 2\mu_{n-1}}} \|x_n - x_{n-1}\|$$

$$= \frac{1 - \mu_{n-1} - \sqrt{1 - 2\mu_{n-1}}}{\mu_{n-1}} \|x_n - x_{n-1}\|$$

In dieser Form wurde die Fehlerschranke (1.11) von Antosiewicz angegeben. Man findet den entsprechenden Satz etwa bei Falb [2], S.35, Theorem 4.38. Die dort angegebenen Voraussetzungen sind stets erfüllt, wenn die Voraussetzungen des Satzes I.2 (über das Newton-Verfahren) erfüllt sind. Die Schranke wird in [2] zwar nur für die Abschätzung von $\|x^* - x_1\|$ durch $\|x_1 - x_0\|$ angegeben, da jedoch die Voraussetzungen des Newton-Satzes (Satz I.2) für jedes x_n erfüllt sind, wenn sie nur für x_0 gelten, so erhält man unmittelbar die obige Fehlerschranke.

Eine weitere, sehr viel einfachere Möglichkeit der Fehlerabschätzung - die allerdings keinen geschlossenen Ausdruck mehr liefert - ergibt sich unmittelbar aus den Beziehungen (1.4), (1.6) und $(\text{Ind } 3)_n$ des Beweises von Satz I.2. Man hat nämlich

$$(1.13) \qquad \|x^* - x_n\| \le \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sigma_{n+\kappa} \le \sum_{\kappa=0}^{m} \sigma_{n+\kappa} + 2\sigma_{n+m+1}$$

Die hierin auftretenden σ_j, μ_j, $j = n(1)n+m+1$ sind gemäß (1.4),(1.6) rekursiv aus $\sigma_{n-1} := \|x_n - x_{n-1}\|$ und $\mu_{n-1} := \|[F'(x_{n-1})]^{-1}\| K_2 \sigma_{n-1}$ berechenbar. Die Güte dieser Abschätzung, die bei Verwendung programmierbarer Rechenanlagen nicht aufwendiger als ein geschlossener Ausdruck ist, hängt ab von der Größe von m. Für $\mu_{n-1} \ll \frac{1}{2}$ wird man bereits für $m = 2$ und selbst für $\mu_{n-1} \approx \frac{1}{2}$ für $m = 5$, höchstens $m = 10$ Genauigkeiten erreichen, die die von geschlossenen Ausdrücken noch etwas übertreffen, da letztere stets nur mehr oder weniger gute Abschätzungen der Beziehung (1.13) darstellen.

Die beiden folgenden Sätze über zwei Varianten des Newton-Verfahrens werden, ebenso wie der bereits bewiesene Satz, hauptsächlich für die

Behandlung von Iterationsverfahren höherer Ordnung in den weiteren Kapiteln dieser Arbeit benötigt.

Satz I.5 (über das modifizierte Newton-Verfahren): Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen $\beta_0, K_2, \delta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq \beta_0 \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \leq \delta_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \| x - x_0 \| \leq 2\delta_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq K_2$$

$$\beta_0 K_2 \delta_0 \leq \frac{1}{2}$$

Dann gilt:

(1.14) Die durch x_0 und $x_{n+1} := x_n - [F'(x_0)]^{-1} F(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$.

(1.15) Es gilt $F(x^*) = \theta$.

(1.16) Die Gleichung $F(x) = \theta$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Die Abbildung $\phi: [0, 2\delta_0] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\phi(t) := \delta_0 + \frac{1}{2} \beta_0 K_2 t^2$$

Sei nun $t_0 := 0$, so existiert die durch t_0 und $t_{n+1} := \phi(t_n)$ rekursiv definierte Folge, ist monoton wachsend und es gilt $t_n \leq 2\delta_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Denn: Es ist $t_0 \in [0, 2\delta_0]$. Sei $t_n \in [0, 2\delta_0]$, so gilt $t_{n+1} = \phi(t_n) \geq 0$ und

$$t_{n+1} = \phi(t_n) = \delta_0 + \frac{1}{2} \beta_0 K_2 t_n^2 \leq \delta_0 + 2 \beta_0 K_2 \delta_0^2 \leq 2\delta_0$$

d.h. $t_{n+1} \in [0, 2\delta_0]$. Also existiert die Folge $\{t_n\}$. Wegen $\phi'(t) = \beta_0 K_2 t \geq 0 \ \forall\, t \in [0, 2\delta_0]$ ist $\phi(t)$ auf $[0, 2\delta_0]$ monoton wachsend. Also ist $\{t_n\}$ monoton wachsend.

Es wird nun gezeigt: $x_n \in S_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Hierfür genügt: $\| x_n - x_0 \| \leq t_n$. Für $n = 0, 1$ ist diese Behauptung richtig. Durch Induktion wird sie für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Sei also $\| x_n - x_0 \| \leq t_n$, so ist

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - x_0 \| &\leq \| x_{n+1} - x_1 \| + \| x_1 - x_0 \| \\
&\leq \| x_n - [F'(x_0)]^{-1} F(x_n) - x_0 + [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| + \delta_0 \\
&\leq \beta_0 \| F(x_0) + F'(x_0)[x_n - x_0] - F(x_n) \| + \delta_0 \\
&\leq \frac{1}{2} \beta_0 K_2 \| x_n - x_0 \|^2 + \delta_0 \\
&\leq \delta_0 + \frac{1}{2} \beta_0 K_2 t_n^2 \\
&= \phi(t_n) \\
&= t_{n+1}
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis geführt.

Es wird nun für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gezeigt:

$$\| x_{n+k} - x_n \| \leq t_{n+k} - t_n$$

Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und $n = 0$ ist diese Behauptung richtig, denn $\| x_k - x_0 \| \leq t_k \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ wurde bereits gezeigt. Durch Induktion wird der Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$ geführt. Gelte also $\| x_{n+k} - x_n \| \leq t_{n+k} - t_n$ so ist

$$\| x_{n+k+1} - x_{n+1} \| = \| x_{n+k} - [F'(x_0)]^{-1} F(x_{n+k}) - x_n + [F'(x_0)]^{-1} F(x_n) \|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \beta_0 \| F(x_n) + F'(x_0)[x_{n+k} - x_n] - F(x_{n+k}) \| \\
&\leq \beta_0 \| F(x_n) + F'(x_n)[x_{n+k} - x_n] - F(x_{n+k}) \| + \\
&\quad + \beta_0 \| F'(x_0) - F'(x_n) \| \| x_{n+k} - x_n \| \\
&\leq \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 \| x_{n+k} - x_n \|^2 + \beta_0 K_2 \| x_n - x_0 \| \| x_{n+k} - x_n \| \\
&\leq \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 (t_{n+k} - t_n)^2 + \beta_0 K_2 t_n (t_{n+k} - t_n) \\
&= \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 [t_n + (t_{n+k} - t_n)]^2 - \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 t_n^2 \\
&= \varphi_0 + \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 t_{n+k}^2 - \varphi_0 - \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 t_n^2 \\
&= \Phi(t_{n+k}) - \Phi(t_n) \\
&= t_{n+k+1} - t_{n+1}
\end{aligned}
$$

Damit ist der Induktionsbeweis geführt.

Da die Folge $\{t_n\}$ monoton und beschränkt ist, konvergiert sie, ist also Cauchy-Folge. Wegen $\| x_{n+k} - x_n \| \leq t_{n+k} - t_n$ ist dann auch $\{x_n\}$ Cauchy-Folge. Da X vollständig ist und S_0 abgeschlossen ist sowie $x_n \in S_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt, gibt es ein $x^* \in S_0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Damit ist (1.14) bewiesen.
Wegen $\| F(x_n) \| \leq \beta_0 \| x_n - x_{n+1} \|$ gilt für $n \to \infty$: $F(x^*) = \theta$. Damit ist (1.15) bewiesen.
(1.16) folgt aus Satz I.2 (über das Newton-Verfahren).
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Wenn man in Satz I.5 (über das modifizierte Newton-Verfahren) die Voraussetzungen dadurch geringfügig verschärft, daß man $\beta_0 K_2 \varphi_0 < \frac{1}{2}$ fordert statt $\leq \frac{1}{2}$, so kann man die Konvergenzaussage dieses Satzes mit einer viel einfacheren Beweisführung von einer lokalen zu einer globalen Aussage verallgemeinern, wie der folgende Satz zeigt:

Satz I.6: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$
\| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq \beta_0 \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \leq \varphi_0
$$

$$
S_0 := \{ x \in X : \| x - x_0 \| \leq 2\varphi_0 \} \subset M
$$

$$
\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq K_2
$$

$$
\beta_0 K_2 \varphi_0 < \tfrac{1}{2}
$$

Dann gilt:
(1.17) Für jedes $y_0 \in S_0$ existiert die durch y_0 und $y_{n+1} := y_n - [F'(x_0)]^{-1} \cdot F(y_n)$ rekursiv definierte Folge $\{y_n\}$, es gilt $y_n \in S_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x^*$.
(1.18) Es gilt $F(x^*) = \theta$.
(1.19) Die Gleichung $F(x) = \theta$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Der das Iterationsverfahren erzeugende Operator ist

$$
T(x) := x - [F'(x_0)]^{-1} F(x)
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
T'(x) &= I - [F'(x_0)]^{-1} F'(x) \\
T''(x) &= - [F'(x_0)]^{-1} F''(x)
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\sup_{x \in S_0} \| T''(x) \| \leq \beta_0 \sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq \beta_0 K_2
$$

D.h.

$$\begin{aligned}\sup_{x\in S_0}\|T'(x)\| &\le \sup_{x\in S_0}\{\|T'(x_0)\| + \sup_{\tilde{x}\in S_0}\|T''(\tilde{x})\|\,\|x - x_0\|\}\\ &= \beta_0 K_2 \sup_{x\in S_0}\|x - x_0\|\\ &\le 2\,\beta_0 K_2 \mathcal{S}_0\\ &< 1\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}x\in S_0 \Rightarrow \|T(x) - x_0\| &= \|x - x_0 - [F'(x_0)]^{-1}F(x)\|\\ &= \|x - x_0 - [F'(x_0)]^{-1}[F(x) + F(x_0) - F(x_0)]\|\\ &\le \|[F'(x_0)]^{-1}\|\,\|F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) -\\ &\quad - F(x)\| + \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|\\ &\le \beta_0 \tfrac{1}{2} K_2 \|x - x_0\|^2 + \mathcal{S}_0\\ &\le (1 + \tfrac{1}{2}\beta_0 K_2 4\mathcal{S}_0)\mathcal{S}_0\\ &< 2\,\mathcal{S}_0 \qquad \Rightarrow T(x)\in S_0\end{aligned}$$

Mit $\sup_{x\in S_0}\|T'(x)\| < 1$ und $T(S_0)\subset S_0$ folgt aber aus dem Banach'schen Fixpunktsatz (Satz E.1) sofort die Behauptung. ■

Während Satz I.5 lediglich eine lokale Konvergenzaussage liefert in dem Sinne, daß nur die Konvergenz einer ganz bestimmten, durch die Voraussetzungen eindeutig festgelegten Iterationsfolge gezeigt werden konnte, garantiert Satz I.6 die Konvergenz jeder beliebigen innerhalb eines bestimmten Bereiches gestarteten Näherungsfolge, so daß man die Aussage dieses Satzes geradezu in der Form schreiben könnte

(1.20) Menge S_0 erfülle die Voraussetzungen des Satzes.
Dann gilt für $S_{n+1} := T(S_n)$:
$S_{n+1}\subset S_n$ und $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n = \{x^*\}$

Die für den Anwender wichtige Folgerung dieses Satzes ist, daß das modifizierte Newton-Verfahren numerisch sehr stabil ist, d.h. selbst grobe Rundungsfehler werden i.a. die Konvergenz dieses Verfahrens nicht beeinträchtigen.

Der folgende Satz bezieht sich auf eine in der Praxis viel benutzte Variante des Newton-Verfahrens, bei der auf jeden Newton-Schritt ein modifizierter Newton-Schritt folgt.

Satz I.7 (über das gemischte Newton-Verfahren): Es sei X ein Banach-Raum, $M\subset X$ offen, $x_0\in M$ und $F:M\to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \le \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \le \mathcal{S}_0$$

$$S_0 := \{x\in X : \|x - x_0\| \le 2\mathcal{S}_0\} \subset M$$

$$\sup_{x\in S_0}\|F''(x)\| \le K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \mathcal{S}_0 \le \tfrac{1}{2}$$

Dann gilt:
(1.21) Die durch x_0 und
$\xi_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$
$x_{n+1} := \xi_{n+1} - [F'(x_n)]^{-1}F(\xi_{n+1})$
rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n\in S_0\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ und es gibt ein $x^*\in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

(1.22) Es gilt $F(x^*) = \theta$.
(1.23) Die Gleichung $F(x) = \theta$ besitzt in S_o außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis:
(A) Es wird zunächst gezeigt, daß die durch β_o, $\mathcal{S}_o$, μ_o sowie

$$\mu_{n+1} := \frac{\frac{1}{8}\mu_n^4 + \frac{1}{2}\mu_n^3}{(1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2)^2} \tag{1.24}$$

$$\beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \tag{1.25}$$

$$\mathcal{S}_{n+1} := \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}\,\mathcal{S}_n \tag{1.26}$$

rekursiv definierten Folgen $\{\mu_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\mathcal{S}_n\}$ existieren und daß gilt

$$\mu_n \geq 0 \quad ; \quad \beta_n \geq 0 \quad ; \quad \mathcal{S}_n \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1.27}$$

$$\mu_{n+1} \leq \mu_n \quad ; \quad \mathcal{S}_{n+1} \leq \tfrac{3}{8}\,\mathcal{S}_n \quad ; \quad \beta_n K_2 \mathcal{S}_n = \mu_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Denn: Nach Voraussetzung des Satzes gilt $0 \leq \mu_o \leq \frac{1}{2}$. Gelte nun $0 \leq \mu_n \leq \frac{1}{2}$, so ist $\mu_{n+1} \geq 0$ und

$$\mu_{n+1} = \frac{\frac{1}{8}\mu_n^4 + \frac{1}{2}\mu_n^3}{(1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2)^2} \leq \mu_n \leq \frac{1}{2}$$

Damit sind die Behauptungen für $\{\mu_n\}$ bewiesen. Hieraus folgen unmittelbar die Behauptungen für $\{\beta_n\}$, da $\beta_o \geq 0$. Wegen $\mathcal{S}_o \geq 0$ und

$$\mathcal{S}_{n+1} = \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}\,\mathcal{S}_n \leq \frac{3}{8}\,\mathcal{S}_n$$

gelten die Behauptungen auch für $\{\mathcal{S}_n\}$.
Nach Definition von μ_o gilt $\mu_o = \beta_o K_2 \mathcal{S}_o$. Sei $\mu_n = \beta_n K_2 \mathcal{S}_n$, so gilt

$$\mu_{n+1} = \frac{\frac{1}{8}\mu_n^4 + \frac{1}{2}\mu_n^3}{(1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2)^2} = \frac{\beta_n}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} K_2 \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}\,\mathcal{S}_n$$

$$= \beta_{n+1} K_2 \mathcal{S}_{n+1}$$

Damit ist (A) bewiesen.

(B) Es wird nun durch vollständige Induktion nach n gezeigt:
$(\text{Ind } 1)_n$ $[F'(x_n)]^{-1}$ existiert und es gilt $\|[F'(x_n)]^{-1}\| \leq \beta_n$.
$(\text{Ind } 2)_n$ $S_n \subset S_{n-1} \subset S_o$
$(\text{Ind } 3)_n$ $\|[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\| \leq \mathcal{S}_n$, sowie $\|[F'(x_n)]^{-1}\| \, \|F(x_n)\| \leq \mathcal{S}_n$ für $n \geq 1$.
Dabei ist $S_n := \{ x \in X : \|x - x_n\| \leq 2\mathcal{S}_n \}$; $S_{-1} := S_o$.

Denn: Die Induktionsverankerung folgt aus den Voraussetzungen des Satzes. Schluß von n auf n+1:
Wegen $(\text{Ind } 2)_n$ gilt $x_n \in S_o$. Wegen $(\text{Ind } 1)_n$, $(\text{Ind } 3)_n$ gilt

$$\| [F'(x_n)]^{-1} \| K_2 \| [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \| \leq \beta_n K_2 \delta_n \leq \tfrac{1}{2}$$

Wegen $(\text{Ind } 2)_n$ sind somit die Voraussetzungen des Satzes I.5 (über das modifizierte Newton-Verfahren) mit der Startstelle x_n erfüllt. ξ_{n+1} und x_{n+1} sind die beiden ersten Näherungen dieses modifizierten Newton-Verfahrens. Der entsprechende Satz garantiert also: $\xi_{n+1}, x_{n+1} \in S_0$. Weiter entnimmt man dem Beweis dieses Satzes die Abschätzungen:

$$\text{(1.28)} \qquad \begin{cases} \| \xi_{n+1} - x_n \| \leq \delta_n \\ \| x_{n+1} - \xi_{n+1} \| \leq \tfrac{1}{2} \beta_n K_2 \delta_n^2 \\ \| x_{n+1} - x_n \| \leq \delta_n + \tfrac{1}{2} \beta_n K_2 \delta_n^2 \end{cases}$$

Somit gilt:

$$\| [F'(x_n)]^{-1} \| K_2 \| \xi_{n+1} - x_n \| \leq \beta_n K_2 \delta_n = \mu_n < 1$$

Unter Heranziehung des Banach-Lemmas (Satz I.1) folgt hieraus die Existenz von $[F'(\xi_{n+1})]^{-1}$ und die Abschätzung

$$\| [F'(\xi_{n+1})]^{-1} \| \leq \frac{\| [F'(x_n)]^{-1} \|}{1 - \| [F'(x_n)]^{-1} \| K_2 \| \xi_{n+1} - x_n \|}$$

Hieraus folgt

$$\| [F'(\xi_{n+1})]^{-1} \| K_2 \| x_{n+1} - \xi_{n+1} \| \leq \frac{\tfrac{1}{2} \beta_n^2 K_2^2 \delta_n^2}{1 - \beta_n K_2 \delta_n} = \frac{\tfrac{1}{2} \mu_n^2}{1 - \mu_n} < 1$$

Dies liefert unter Heranziehung des Banach-Lemmas (Satz I.1) die Existenz von $[F'(x_{n+1})]^{-1}$ sowie die Abschätzung

$$\| [F'(x_{n+1})]^{-1} \| \leq \frac{\| [F'(\xi_{n+1})]^{-1} \|}{1 - \| [F'(\xi_{n+1})]^{-1} \| K_2 \| x_{n+1} - \xi_{n+1} \|}$$

$$\leq \frac{\dfrac{\| [F'(x_n)]^{-1} \|}{1 - \| [F'(x_n)]^{-1} \| K_2 \| \xi_{n+1} - x_n \|}}{1 - \dfrac{\| [F'(x_n)]^{-1} \|}{1 - \| [F'(x_n)]^{-1} \| K_2 \| \xi_{n+1} - x_n \|} K_2 \| x_{n+1} - \xi_{n+1} \|}$$

$$\leq \frac{\beta_n}{1 - \mu_n - \tfrac{1}{2} \mu_n^2} = \beta_{n+1}$$

Damit ist $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ bewiesen.
Es ist:

$$\begin{aligned} \| F(x_{n+1}) \| &= \| F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)[\xi_{n+1} - x_n] - F(\xi_{n+1}) - F'(x_n) * \\ &\quad * [x_{n+1} - \xi_{n+1}] \| \\ &= \| F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)[x_{n+1} - x_n] - F(\xi_{n+1}) \| \\ &= \| F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)[x_{n+1} - x_n] - F(\xi_{n+1}) + F(x_n) + \\ &\quad + F'(x_n)[\xi_{n+1} - x_n] \| \\ &= \| F(x_{n+1}) - F(\xi_{n+1}) - F'(x_n)[x_{n+1} - \xi_{n+1}] \| \\ &\leq \| F(x_{n+1}) - F(\xi_{n+1}) - F'(\xi_{n+1})[x_{n+1} - \xi_{n+1}] \| + \| F'(\xi_{n+1}) - \\ &\quad - F'(x_n) \| \| x_{n+1} - \xi_{n+1} \| \\ &\leq \tfrac{1}{2} K_2 \| x_{n+1} - \xi_{n+1} \|^2 + K_2 \| \xi_{n+1} - x_n \| \| x_{n+1} - \xi_{n+1} \| \\ &\leq \tfrac{1}{8} \mu_n^2 K_2 \delta_n^2 + \tfrac{1}{2} \mu_n K_2 \delta_n^2 \qquad \text{nach (1.28)} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Also:

$$\text{(1.30)} \quad \| [F'(x_{n+1})]^{-1} F(x_{n+1}) \| \leq \| [F'(x_{n+1})]^{-1} \| \| F(x_{n+1}) \|$$

$$\leq \beta_{n+1}\left[\tfrac{1}{8}\mu_n^2 K_2 \mathcal{S}_n^2 + \tfrac{1}{2}\mu_n K_2 \mathcal{S}_n^2\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}\,\mathcal{S}_n$$

$$= \mathcal{S}_{n+1}$$

Damit ist $(\text{Ind } 3)_{n+1}$ bewiesen.
Es ist nach (1.28), $(\text{Ind } 1)_{n+1}$, $(\text{Ind } 3)_{n+1}$:

(1.31) $$\|x_{k+1} - x_k\| \leq (1 + \tfrac{1}{2}\mu_k)\,\mathcal{S}_k \qquad \forall\, k \leq n$$
$$\leq (1 + \tfrac{1}{4})\left(\tfrac{3}{8}\right)^k \mathcal{S}_0 \qquad \text{nach (1.27)}$$

Sei nun $x \in S_{n+1}$, d.h. $\|x - x_{n+1}\| \leq 2\mathcal{S}_{n+1}$, dann gilt:

$$\|x - x_n\| \leq \|x - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\|$$
$$\leq 2\,\mathcal{S}_{n+1} + (1 + \tfrac{1}{2}\mu_n)\,\mathcal{S}_n \qquad \text{nach (1.31)}$$
$$\leq \left\{2\,\frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} + 1 + \tfrac{1}{2}\mu_n\right\}\mathcal{S}_n \qquad \text{nach (1.26)}$$
$$\leq 2\,\mathcal{S}_n$$

Damit ist $(\text{Ind } 2)_{n+1}$ bewiesen.
Damit ist (B) bewiesen.

Wegen (1.31) bilden die $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, gibt es ein x^* mit $x_n \to x^*$. Da S_0 abgeschlossen ist, gilt $x^* \in S_0$ wegen $x_n \in S_0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Damit ist (1.17) bewiesen.
Wegen (1.29), der Stetigkeit von F und der Stetigkeit der Norm sowie wegen (1.27) folgt für $n \to \infty$: $F(x^*) = \theta$. Daraus folgt (1.18).
(1.19) ergibt sich aus dem Satz I.2 (über das Newton-Verfahren).
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Ergänzungen: In den Sätzen I.2, I.5, I.6 und I.7 kann man die Forderung der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit des Operators F mit $\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$ ersetzen durch die etwas schwächere Bedingung der einmaligen Lipschitz-stetigen Differenzierbarkeit, d.h. es wird gefordert

(1.32) $$\|F'(y_1) - F'(y_2)\| \leq K_2 \|y_1 - y_2\| \qquad \forall\, y_1, y_2 \in S_0$$

Der Beweis der Sätze verläuft dann völlig analog. Auch die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens (Satz I.3) bleibt unter diesen Bedingungen erhalten. Hierzu beachtet man die Taylorformel für differenzierbare Operatoren in Banach-Räumen:

(1.33) Ist der Operator F p-mal stetig differenzierbar, so gilt

$$F(x+y) = F(x) + \frac{F'(x)\,y}{1!} + \cdots + \frac{F^{(p)}(x)\,y^p}{p!} + \vartheta(y)$$

mit

$$\|\vartheta(y)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{\|F^{(p)}(x+ty) - F^{(p)}(x)\|}{p!}\,\|y\|^p$$

Man erhält dann analog zum Beweis von Satz I.3, wenn $F(x^*) = \theta$ ist :

(1.34) $$\|x^* - x_{n+1}\| = \|x^* - x_n + [F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\|$$
$$\leq \|[F'(x_n)]^{-1}\|\,\|F(x_n) + F'(x_n)(x^* - x_n) - F(x^*)\|$$
$$= \|[F'(x_n)]^{-1}\|\,\|-F'(x^*)(x^* - x_n) + \vartheta(x^* - x_n) + F'(x_n)(x^* - x_n)\|$$

$$\leq \|[F'(x_n)]^{-1}\| \{ \|[F'(x_n) - F'(x^*)](x^* - x_n)\| + \|\vartheta(x^* - x_n)\| \}$$
$$\leq \|[F'(x_n)]^{-1}\| \{ \|F'(x_n) - F'(x^*)\| \|x^* - x_n\| + \|\vartheta(x^* - x_n)\| \}$$
$$\leq \|[F'(x_n)]^{-1}\| \{ K_2 \|x^* - x_n\|^2 + \|\vartheta(x^* - x_n)\| \} \qquad \text{wegen (1.32)}$$

Unter Beachtung von (1.33) gilt dann

$$\|\vartheta(x^* - x_n)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|F'(x^* + t(x_n - x^*)) - F'(x^*)\| \, \|x^* - x_n\|$$
$$\leq \sup_{t \in [0,1]} K_2 \|x^* + t(x_n - x^*) - x^*\| \, \|x^* - x_n\| \quad \text{wegen (1.32)}$$
$$\leq K_2 \|x^* - x_n\|^2$$

Wenn man dies nun in (1.34) einsetzt, erhält man die quadratische Konvergenz.

In den Sätzen I.2, I.5, I.6 und I.7 kann man die Kugel

$$S_0 := \{ x \in X : \|x - x_0\| \leq 2\delta_0 \}$$

ersetzen durch die Kugel

$$\tilde{S}_0 := \{ x \in X : \|x - x_1\| \leq \delta_0 \}$$

Auch diese Kugel ist durch den Startpunkt eindeutig bestimmt. Die Abschätzung von $\|F''(x)\|$ über diese kleinere Kugel wird i.a. etwas kleinere Konstanten K_2 liefern als die entsprechende Abschätzung über S_0. Andererseits würde diese Wahl der Kugel jedoch kaum etwas anderes bedeuten, als daß man die entsprechenden Sätze auf die Startstelle x_1 statt x_0 anwendet, denn es gilt $\delta_0 \approx 2\delta_1$. Für alle in dieser Arbeit angegebenen Sätze wird daher der Standardtyp mit der Startstelle x_0 als Kugelmittelpunkt gewählt, zumal hierdurch auch die Aussagen der einzelnen Sätze besser miteinander vergleichbar sind.

Literatur:

[1] Döring, B. — Über das Newtonsche Näherungsverfahren. Math.-Phys. Sem.-Ber. 16 (1969), 27 - 40.

[2] Falb, P. L. de Jong, J. L. — Some successive approximation Methods in control and oscillation theory. Academic Press. New York / London. 1969.

[3] Lang, S. — Analysis II. Addison-Wesley. Reading / Mass. 1969.

Kapitel II

Einige Sätze zum Tschebyscheff-Verfahren

Als erstes Verfahren höherer Ordnung soll in dieser Arbeit das Tschebyscheff-Verfahren betrachtet werden, das in der Literatur auch als Verfahren der tangierenden Parabeln oder als verbessertes bzw. verschärftes Newton-Verfahren bezeichnet wird. Dabei sind alle Untersuchungen von vornherein auf die konkrete numerische Anwendung des Verfahrens ausgerichtet. Die angegebenen Sätze wurden daher unter Beachtung jener Postulate konzipiert, die Döring in [4] und [5] im Hinblick auf gute Anwendbarkeit aufgestellt hat:

(1) Die Voraussetzungen seien möglichst schwach und bei der Anwendung auf konkrete Probleme der Analysis leicht nachprüfbar.

(2) Gleichzeitige (lokale) Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen über die Lösung der Aufgabe sowie über die Konvergenz und Konvergenzordnung des Verfahrens innerhalb einer durch die Ausgangsnäherung x_0 eindeutig bestimmten Kugel.

(3) Möglichst scharfe, numerisch wirklich brauchbare und leicht berechenbare Fehlerschranken.

Hierbei sind die Postulate (1) und (3) allerdings in gewisser Hinsicht reziprok: So bedeutet nämlich (1), daß man bestrebt ist, möglichst wenig Informationen über das Verhalten des betrachteten Operators vorauszusetzen, während doch für die in (3) geforderten scharfen Fehlerschranken eine möglichst genaue Kenntnis der Eigenschaften der betrachteten Abbildung wünschenswert wäre. Auch die Forderung (1) allein erhält eigentlich erst im Zusammenhang mit speziellen Aufgabentypen eine klare Bedeutung. So kann nämlich die Voraussetzung gewisser Differenzierbarkeitseigenschaften für den einen Aufgabentyp leicht nachprüfbar, ja trivial sein, den Anwender in anderen Fällen aber vor schier unüberwindbare Schwierigkeiten stellen. In diesem Sinne müssen also auch die Voraussetzungen der in dieser Arbeit angegebenen Sätze in ihrer Einfachheit oder Kompliziertheit relativ gesehen werden. Insgesamt kann man aber wohl doch sagen, daß Bedingungen, die den Voraussetzungen des Satzes über das Newton-Verfahren (Satz I.2) analog sind, einen tragbaren Kompromiß zwischen allzu spezieller Einfachheit und sehr allgemeiner Kompliziertheit darstellen.

Zur Einfachheit der Konvergenzbedingungen wäre noch anzumerken, daß diese im wesentlichen nur durch die in der Konvergenzbedingung auftretenden Größen bestimmt wird, aber nicht durch die spezielle Gestalt der Bedingung. So wird z.B. die im Newton-Verfahren auftretende Konvergenzvoraussetzung

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \eta_0 < \frac{1}{2}$$

in ihrer Nachprüfbarkeit nicht beeinträchtigt, wenn man statt dessen aus dem μ_0 zunächst mit Hilfe eines endlichen Algorithmus neue Zahlen

zu berechnen hätte, die dann ihrerseits gewissen Forderungen genügen müßten. Die numerische Auswertung eines solchen Algorithmus bereitet nämlich bei Verwendung programmierbarer Rechenanlagen keine Schwierigkeiten und die problembezogene Arbeit, d.h. die Bestimmung von $\mathcal{S}_0$ sowie die Abschätzung von β_0 und K_2, ist die gleiche wie im Falle der Forderung

$$\mu_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

In diesem Sinne könnte man den Begriff der Konvergenzvoraussetzung noch einmal aufspalten in Konvergenzgrößen und Konvergenzbedingung. Die Konvergenzgrößen wären dabei problembezogene Informationen - im obigen Beispiel also β_0, K_2 und $\mathcal{S}_0$ - während die Konvergenzbedingung allgemein gesprochen eine logische Funktion dieser Konvergenzgrößen wäre. Wenn man diese Unterscheidung berücksichtigt, hätte man die Forderung (1) von Döring auszusprechen in der Form

(1a) Die Konvergenzgrößen sollen für den konkreten Anwendungsfall möglichst leicht berechenbar bzw. abschätzbar sein.

Diese etwas allgemeinere Interpretation des Begriffs der Konvergenzvoraussetzung ist insofern von Bedeutung, als man hierdurch viele Sätze von vornherein etwas allgemeiner und flexibler in der Anwendbarkeit formulieren kann. So wurde denn auch für den ersten hier angegebenen Satz, der in Beweisidee und -methode auf Döring [3] und [4] zurückgeht, diese etwas allgemeinere Form der Konvergenzvoraussetzung gewählt. Im übrigen wird dieser Satz, der wohl der im Sinne der Forderungen (1) - (3) bisher beste Satz zum Tschebyscheff-Verfahren war, hier nur angegeben, um einerseits als Vergleichsmaßstab für die nachfolgend bewiesenen Sätze zu dienen, und andererseits um die speziellen Schwierigkeiten und Unzulänglichkeiten der bisherigen Beweismethodik aufzeigen zu können.

Satz II.1: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \mathcal{S}_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \|x - x_0\| \leq R\,\mathcal{S}_0 \} \subset M \quad \text{für ein festes } R \geq 2$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F'''(x)\| \leq K_3$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \mathcal{S}_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\chi_0 := \beta_0 K_3 \mathcal{S}_0^2$$

Überdies gelte:

$$(2.1) \qquad \frac{\mu_0\left[\frac{1}{6}\chi_0(1+\frac{1}{2}\mu_0)^3 + \frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\mu_0)\mu_0^2\right]}{\left[1-\mu_0(1+\frac{1}{2}\mu_0)\right]^2} \leq \mu_0$$

$$(2.2) \qquad \frac{\chi_0\left[\frac{1}{6}\chi_0(1+\frac{1}{2}\mu_0)^3 + \frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\mu_0)\mu_0^2\right]^2}{\left[1-\mu_0(1+\frac{1}{2}\mu_0)\right]^3} \leq \chi_0$$

$$(2.3) \qquad R\,\frac{\frac{1}{6}\chi_0(1+\frac{1}{2}\mu_0)^3 + \frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\mu_0)\mu_0^2}{1-\mu_0(1+\frac{1}{2}\mu_0)} + 1 + \tfrac{1}{2}\mu_0 \leq R$$

(Hierdurch wird die Bedingung $\mu_0 \leq \frac{1}{2}$ in Abhängigkeit vom Werte von χ_0 weiter eingeschränkt! Analoges gilt für ähnliche Sätze!!)

Dann gilt:

(2.4) Die durch x_0 und
$x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \frac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)\,[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)}$
rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

(2.5) Es gilt $F(x^*) = \theta$.

Beweis: Es werden zunächst die durch

(2.6) β_0, μ_0, χ_0, $\mathcal{S}_0$
sowie

(2.7) $$\beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1 - \mu_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)}$$

(2.8) $$\mathcal{S}_{n+1} := \frac{\frac{1}{6}\chi_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)^3 + \frac{1}{4}(2 + \frac{1}{2}\mu_n)\mu_n^2}{1 - \mu_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)}\,\mathcal{S}_n$$

(2.9) $$\mu_{n+1} := \frac{\mu_n[\frac{1}{6}\chi_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)^3 + \frac{1}{4}(2 + \frac{1}{2}\mu_n)\mu_n^2]}{[1 - \mu_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)]^2}$$

(2.10) $$\chi_{n+1} := \frac{\chi_n[\frac{1}{6}\chi_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)^3 + \frac{1}{4}(2 + \frac{1}{2}\mu_n)\mu_n^2]}{[1 - \mu_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)]^3}$$

rekursiv definierten Folgen $\{\beta_n\}, \{\mathcal{S}_n\}, \{\mu_n\}, \{\chi_n\}$ eingeführt.

Es wird zunächst gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (2.6) - (2.10) definierten Zahlen β_n, $\mathcal{S}_n$, μ_n, χ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, sowie

(2.11) $\mu_n \geq 0$; $\mu_{n+1} \leq \mu_n$; $\mu_n = \beta_n K_2 \mathcal{S}_n$ $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(2.12) $\mathcal{S}_n \geq 0$; $\mathcal{S}_{n+1} \leq \alpha\,\mathcal{S}_n$ mit $\alpha < 1$ $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(2.13) $\beta_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(2.14) $\chi_n \geq 0$; $\chi_{n+1} \leq \chi_n$; $\chi_n = \beta_n K_3 \mathcal{S}_n^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Denn: Die Rekursionsausdrücke (2.7) - (2.10) sind für $0 \leq \mu_n \leq \frac{1}{2}$ sowie μ_n, χ_n, $\beta_n \geq 0$ positiv oder Null. Ebenso sind die Rekursionsausdrücke (2.9) - (2.10) für $0 \leq \mu_n \leq \frac{1}{2}$, $\chi_n \geq 0$ in μ_n, χ_n monoton fallend. Da wegen (2.1), (2.2) gilt $\mu_1 \leq \mu_0$, $\chi_1 \leq \chi_0$ erhält man also

$$\mu_{n+1} \leq \mu_n \quad , \quad \chi_{n+1} \leq \chi_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Da man noch leicht $\mu_n = \beta_n K_2 \mathcal{S}_n$, $\chi_n = \beta_n K_3 \mathcal{S}_n^2$ nachprüft, folgt (2.11), (2.14). Hieraus folgt sofort (2.13) und $\mathcal{S}_n \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ebenso erhält man zusammen mit (2.3)

(2.15) $$R\,\frac{\frac{1}{6}\chi_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)^3 + \frac{1}{4}(2 + \frac{1}{2}\mu_n)\mu_n^2}{1 - \mu_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)} + 1 + \frac{1}{2}\mu_n \leq R \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

und

$$\frac{\frac{1}{6}\chi_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)^3 + \frac{1}{4}(2 + \frac{1}{2}\mu_n)\mu_n^2}{1 - \mu_n(1 + \frac{1}{2}\mu_n)} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{1}{6}\chi_0(1+\frac{1}{2}\mu_0)^3 + \frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\mu_0)\mu_0^2}{1-\mu_0(1+\frac{1}{2}\mu_0)} =: \alpha \qquad \forall\ n\in\mathbb{N}$$

wobei aus (2.15) notwendigerweise $\alpha < 1$ folgt, da für alle $n\in\mathbb{N}$ gelten muß: $R\alpha + 1 \leq R$. Unter Beachtung von (2.8) ist dann aber $\delta_{n+1} \leq \alpha\,\delta_n$. Somit gilt auch (2.12).

Für den weiteren Beweis werden nun folgende Bezeichnungen verwendet:

$$F_n := F(x_n) \quad ; \quad F_n' := F'(x_n) \quad ; \quad F_n'^{-1} := [F'(x_n)]^{-1} \quad ; \quad F_n'' := F''(x_n)$$

$$c_n := F_n'^{-1}F_n \quad ; \quad t_n := x_{n+1} - x_n$$

$$S_n := \{x\in X : \|x - x_n\| \leq R\,\delta_n\} \quad ; \quad S_{-1} := S_0$$

Es wird nun gezeigt: Die Folge $\{x_n\}$ existiert und es gilt $x_n\in S_0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Hierfür genügt es durch vollständige Induktion nach n zu zeigen, daß für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$(\text{Ind } 1)_n$ $F_n'^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit $\|F_n'^{-1}\| \leq \beta_n$

$(\text{Ind } 2)_n$ $\|c_n\| \leq \delta_n$

$(\text{Ind } 3)_n$ $S_n \subset S_{n-1}$.

Induktionsverankerung: Für n = 0 sind die Induktionsbehauptungen nach den Voraussetzungen des Satzes richtig.

Schluß von n auf n+1: Es ist $x_{n+1} = x_n + t_n$. Wegen

$$F_n + F_n' c_n = 0 \tag{2.16}$$

$$F_n + F_n' t_n + \frac{1}{2} F_n'' c_n^{(2)} = 0 \tag{2.17}$$

sowie $(\text{Ind } 1)_n$ - $(\text{Ind } 3)_n$ gilt

$$\|t_n\| \leq \delta_n + \frac{1}{2}\beta_n K_2 \delta_n^2 = (1+\frac{1}{2}\mu_n)\,\delta_n \leq R\,\delta_n \tag{2.18}$$

unter Beachtung von (2.15). Also gilt $\|x_{n+1} - x_n\| \leq R\,\delta_n$, d.h. $x_{n+1}\in S_n \subset S_0$. Somit existiert $F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']$ mit

$$\|F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']\| \leq \beta_n K_2 \|t_n\| \leq \beta_n K_2 \delta_n (1+\tfrac{1}{2}\mu_n) = \mu_n(1+\tfrac{1}{2}\mu_n) < 1 \quad \text{wegen (2.11) und } \mu_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

Dann existiert nach dem Banach-Lemma (Satz I.1) auch

$$[I - F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']]^{-1} F_n'^{-1} = F_{n+1}'^{-1}$$

mit

$$\|F_{n+1}'^{-1}\| \leq \frac{\beta_n}{1-\mu_n(1+\frac{1}{2}\mu_n)} = \beta_{n+1} \quad \text{nach (2.7)}$$

Daraus folgt $(\text{Ind } 1)_{n+1}$. Weiter ist unter Beachtung von (2.16), (2.17) sowie (2.18)

$$\begin{aligned}\|F_{n+1}\| &= \|F_{n+1} - F_n - F_n' t_n - \tfrac{1}{2} F_n'' c_n^{(2)}\| \\ &\leq \|F_{n+1} - F_n - F_n' t_n - \tfrac{1}{2} F_n'' t_n^{(2)}\| + \tfrac{1}{2} K_2 \|c_n + t_n\|\,\|c_n - t_n\| \\ &\leq \tfrac{1}{6} K_3 \|t_n\|^3 + \tfrac{1}{2} K_2 (\delta_n + \|t_n\|)\,\tfrac{1}{2}\beta_n K_2 \delta_n^2 \\ &\leq \tfrac{1}{6} K_3 (1+\tfrac{1}{2}\mu_n)^3 \delta_n^3 + \tfrac{1}{4}(2+\tfrac{1}{2}\mu_n)\mu_n K_2 \delta_n^2\end{aligned} \tag{2.19}$$

Mit $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ folgt hieraus mit (2.11), (2.14):

$$\|c_{n+1}\| \leq \|F_{n+1}'^{-1}\|\,\|F_{n+1}\| \leq \frac{\frac{1}{6}\chi_n(1+\frac{1}{2}\mu_n)^3 + \frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\mu_n)\mu_n^2}{1-\mu_n(1+\frac{1}{2}\mu_n)}\,\delta_n$$

$$= \delta_{n+1} \qquad \text{nach (2.8)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 2)_{n+1}$. Schließlich gilt:

$$x \in S_{n+1} \Rightarrow \|x - x_{n+1}\| \leq R\,\vartheta_{n+1}$$

$$\Rightarrow \|x - x_n\| \leq \|x - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq R\,\vartheta_{n+1} + (1 + \tfrac{1}{2}\mu_n)\,\vartheta_n \qquad \text{nach (2.18)}$$

$$\leq \left\{ R\,\frac{\frac{1}{6}\chi_n(1+\frac{1}{2}\mu_n)^3 + \frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\mu_n)\mu_n^2}{1 - \mu_n(1+\frac{1}{2}\mu_n)} + (1+\tfrac{1}{2}\mu_n) \right\} \vartheta_n$$

$$\leq R\,\vartheta_n \qquad \text{nach (2.15)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 3)_{n+1}$. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.
Nach (2.12) gilt nun $\lim_{n\to\infty} \vartheta_n = 0$. Wegen $R < \infty$ geht dann auch der Radius der Kugel S_n gegen Null. Da $x_k \in S_n \;\forall\, k \geq n$ nach $(\text{Ind } 3)_n$, bilden die $\{x_n\}$ also eine Cauchy-Folge. Da X als Banach-Raum vollständig und S_0 abgeschlossen ist, gibt es ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Damit ist (2.4) bewiesen.
Aus (2.19) und $\mu_n \leq \frac{1}{2}$ wegen (2.11) folgt aus $\vartheta_n \to 0$ schließlich $\|F_n\| \to 0$. Wegen der Stetigkeit von F und der Stetigkeit der Norm folgt hieraus $F(x^*) = \theta$, d.h. (2.5).
Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Die recht allgemeinen Voraussetzungen von Satz II.1 sollen nun aus Gründen der Anschaulichkeit und der besseren Vergleichbarkeit mit anderen Sätzen in Zahlen ausgedrückt werden. Hierfür wird der Radius der betrachteten Kugel S_0 auf $2\,\vartheta_0$ festgelegt. Man erhält dann den

Satz II.2: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Frechet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \vartheta_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \|x - x_0\| \leq 2\,\vartheta_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F'''(x)\| \leq K_3$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \vartheta_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\chi_0 := \beta_0 K_3 \vartheta_0^2$$

Haben μ_0 und χ_0 höchstens die Größe der in Tabelle II/1 (S. 30 - 35) angegebenen Wertekombinationen, so gilt:
(2.20) Die durch x_0 und $x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \frac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} \cdot F''(x_n)[[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)]^{(2)}$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.
(2.21) Es gilt $F(x^*) = \theta$.
(2.22) Die Gleichung $F(x) = \theta$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Für die in Tabelle II/1 angegebenen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 beweist man die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz II.1 durch Ausrechnen. Kleinere Werte von μ_0 und χ_0 kann man durch geeignete Vergrößerung der Konstanten K_2 und K_3 stets auf die in Tabelle II/1 angegebenen Werte vergrößern. Da die Voraussetzungen von Satz II.2 die Voraussetzungen von Satz I.2 implizieren, folgt (2.22) aus (1.3).

Tabelle II/1 (zu Satz II.2 bzw. Satz II.1 mit R = 2)

μ_0	χ_0
.000	[illegible]
.001	[illegible]
.002	[illegible]
.003	2.97307
.004	2.96413
.005	2.95520
.006	2.94629
.007	2.93740
.008	2.92852
.009	2.91966
.010	2.91082
.011	2.90199
.012	2.89318
.013	2.88438
.014	2.87560
.015	2.86684
.016	2.85809
.017	2.84935
.018	2.84064
.019	2.83194
.020	2.82325
.021	2.81458
.022	2.80593
.023	2.79729
.024	2.78867
.025	2.78006
.026	2.77147
.027	2.76290
.028	2.75434
.029	2.74579
.030	2.73727
.031	2.72875
.032	2.72025
.033	2.71177
.034	2.70331
.035	2.69485
.036	2.68642
.037	2.67800
.038	2.66959
.039	2.66120
.040	2.65282
.041	2.64446
.042	2.63612
.043	2.62779
.044	2.61947
.045	2.61117
.046	2.60289
.047	2.59462
.048	2.58636
.049	2.57812

μ_0	χ_0
.050	2.56990
.051	2.56169
.052	2.55349
.053	2.54531
.054	2.53714
.055	2.52899
.056	2.52085
.057	2.51273
.058	2.50462
.059	2.49654
.060	2.48845
.061	2.48039
.062	2.47234
.063	2.46430
.064	2.45628
.065	2.44828
.066	2.44028
.067	2.43230
.068	2.42434
.069	2.41639
.070	2.40846
.071	2.40054
.072	2.39263
.073	2.38474
.074	2.37686
.075	2.36899
.076	2.36114
.077	2.35331
.078	2.34548
.079	2.33768
.080	2.32988
.081	2.32210
.082	2.31433
.083	2.30656
.084	2.29884
.085	2.29112
.086	2.28340
.087	2.27571
.088	2.26802
.089	2.26035
.090	2.25269
.091	2.24505
.092	2.23742
.093	2.22981
.094	2.22220
.095	2.21461
.096	2.20704
.097	2.19948
.098	2.19193
.099	2.18439

Tabelle II/1 (zu Satz II.2 bzw. Satz II.1 mit R = 2)

μ_0^*	χ_0	μ_0^*	χ_0
.100	2.17687	.150	1.81720
.101	2.16936	.151	1.81032
.102	2.16187	.152	1.80345
.103	2.15438	.153	1.79660
.104	2.14691	.154	1.78976
.105	2.13946	.155	1.78294
.106	2.13202	.156	1.77612
.107	2.12459	.157	1.76931
.108	2.11717	.158	1.76252
.109	2.10977	.159	1.75574
.110	2.10238	.160	1.74897
.111	2.09500	.161	1.74221
.112	2.08764	.162	1.73547
.113	2.08029	.163	1.72873
.114	2.07295	.164	1.72201
.115	2.06562	.165	1.71530
.116	2.05831	.166	1.70860
.117	2.05101	.167	1.70191
.118	2.04373	.168	1.69524
.119	2.03645	.169	1.68857
.120	2.02919	.170	1.68192
.121	2.02194	.171	1.67528
.122	2.01471	.172	1.66865
.123	2.00749	.173	1.66203
.124	2.00028	.174	1.65542
.125	1.99308	.175	1.64883
.126	1.98589	.176	1.64225
.127	1.97872	.177	1.63567
.128	1.97156	.178	1.62911
.129	1.96442	.179	1.62256
.130	1.95728	.180	1.61603
.131	1.95016	.181	1.60950
.132	1.94305	.182	1.60298
.133	1.93596	.183	1.59648
.134	1.92887	.184	1.58998
.135	1.92180	.185	1.58350
.136	1.91474	.186	1.57703
.137	1.90769	.187	1.57057
.138	1.90066	.188	1.56412
.139	1.89364	.189	1.55769
.140	1.88663	.190	1.55126
.141	1.87963	.191	1.54484
.142	1.87264	.192	1.53844
.143	1.86567	.193	1.53205
.144	1.85871	.194	1.52566
.145	1.85176	.195	1.51929
.146	1.84482	.196	1.51293
.147	1.83790	.197	1.50658
.148	1.83099	.198	1.50025
.149	1.82409	.199	1.49392

Tabelle II/1 (zu Satz II.2 bzw. Satz II.1 mit R = 2)

μ_0	x_0	μ_0	x_0
.200	1.48760	.250	1.18516
.201	1.48150	.251	1.17939
.202	1.47560	.252	1.17362
.203	1.46972	.253	1.16785
.204	1.46344	.254	1.16209
.205	1.45618	.255	1.15634
.206	1.44943	.256	1.15060
.207	1.44369	.257	1.14486
.208	1.43746	.258	1.13914
.209	1.43124	.259	1.13343
.210	1.42503	.260	1.12773
.211	1.41883	.261	1.12204
.212	1.41265	.262	1.11636
.213	1.40647	.263	1.11069
.214	1.40030	.264	1.10502
.215	1.39415	.265	1.09937
.216	1.38800	.266	1.09372
.217	1.38187	.267	1.08809
.218	1.37574	.268	1.08246
.219	1.36963	.269	1.07685
.220	1.36352	.270	1.07124
.221	1.35743	.271	1.06564
.222	1.35135	.272	1.06006
.223	1.34528	.273	1.05448
.224	1.33922	.274	1.04891
.225	1.33317	.275	1.04335
.226	1.32712	.276	1.03780
.227	1.32109	.277	1.03226
.228	1.31507	.278	1.02673
.229	1.30906	.279	1.02121
.230	1.30306	.280	1.01570
.231	1.29707	.281	1.01019
.232	1.29109	.282	1.00470
.233	1.28512	.283	.99921
.234	1.27916	.284	.99374
.235	1.27322	.285	.98827
.236	1.26728	.286	.98282
.237	1.26135	.287	.97737
.238	1.25543	.288	.97193
.239	1.24952	.289	.96650
.240	1.24362	.290	.96108
.241	1.23773	.291	.95567
.242	1.23185	.292	.95027
.243	1.22599	.293	.94487
.244	1.22013	.294	.93949
.245	1.21428	.295	.93411
.246	1.20844	.296	.92875
.247	1.20261	.297	.92339
.248	1.19679	.298	.91804
.249	1.19098	.299	.91270

Tabelle II/1 (zu Satz II.2 bzw. Satz II.1 mit R = 2)

μ_0	χ_0	μ_0	χ_0
.300	.90737	.350	.65188
.301	.90205	.351	.64698
.302	.89674	.352	.64209
.303	.89143	.353	.63721
.304	.88614	.354	.63234
.305	.88085	.355	.62748
.306	.87558	.356	.62262
.307	.87031	.357	.61777
.308	.86505	.358	.61293
.309	.85980	.359	.60810
.310	.85456	.360	.60327
.311	.84932	.361	.59846
.312	.84410	.362	.59365
.313	.83888	.363	.58885
.314	.83368	.364	.58406
.315	.82848	.365	.57927
.316	.82329	.366	.57449
.317	.81811	.367	.56973
.318	.81293	.368	.56496
.319	.80777	.369	.56021
.320	.80261	.370	.55547
.321	.79747	.371	.55073
.322	.79233	.372	.54600
.323	.78720	.373	.54128
.324	.78208	.374	.53656
.325	.77697	.375	.53185
.326	.77186	.376	.52716
.327	.76677	.377	.52246
.328	.76168	.378	.51778
.329	.75660	.379	.51311
.330	.75153	.380	.50844
.331	.74647	.381	.50378
.332	.74142	.382	.49912
.333	.73637	.383	.49448
.334	.73134	.384	.48984
.335	.72631	.385	.48521
.336	.72129	.386	.48059
.337	.71628	.387	.47597
.338	.71127	.388	.47137
.339	.70628	.389	.46677
.340	.70129	.390	.46218
.341	.69631	.391	.45759
.342	.69134	.392	.45301
.343	.68638	.393	.44844
.344	.68143	.394	.44388
.345	.67648	.395	.43933
.346	.67155	.396	.43478
.347	.66662	.397	.43024
.348	.66170	.398	.42571
.349	.65678	.399	.42118

Tabelle II/1 (zu Satz II.2 bzw. Satz II.1 mit R = 2)

μ_0	χ_0
.400	.41607
.401	.41216
.402	.40805
.403	.40376
.404	.39927
.405	.39459
.406	.38971
.407	.38465
.408	.37939
.409	.37394
.410	.36829
.411	.36246
.412	.35643
.413	.35020
.414	.34379
.415	.33718
.416	.33038
.417	.32338
.418	.31620
.419	.30882
.420	.30125
.421	.29348
.422	.28552
.423	.27737
.424	.26903
.425	.26049
.426	.25176
.427	.24284
.428	.23372
.429	.22441
.430	.21491
.431	.20521
.432	.19533
.433	.18524
.434	.17497
.435	.16451
.436	.15384
.437	.14299
.438	.13194
.439	.12070
.440	.10927
.441	.09764
.442	.08582
.443	.07381
.444	.06161
.445	.04921
.446	.03662
.447	.02383
.448	.01085
.449	.00768

μ_0	χ_0
.450	.19992
.451	.19576
.452	.19161
.453	.18746
.454	.18332
.455	.17919
.456	.17507
.457	.17095
.458	.16684
.459	.16273
.460	.15863
.461	.15454
.462	.15046
.463	.14638
.464	.14231
.465	.13824
.466	.13418
.467	.13013
.468	.12609
.469	.12205
.470	.11802
.471	.11399
.472	.10997
.473	.10596
.474	.10195
.475	.09795
.476	.09395
.477	.08997
.478	.08599
.479	.08201
.480	.07804
.481	.07408
.482	.07013
.483	.06618
.484	.06223
.485	.05830
.486	.05437
.487	.05044
.488	.04652
.489	.04261
.490	.03871
.491	.03481
.492	.03092
.493	.02703
.494	.02315
.495	.01928
.496	.01541
.497	.01155
.498	.00769
.499	.00384
.500	0.00000

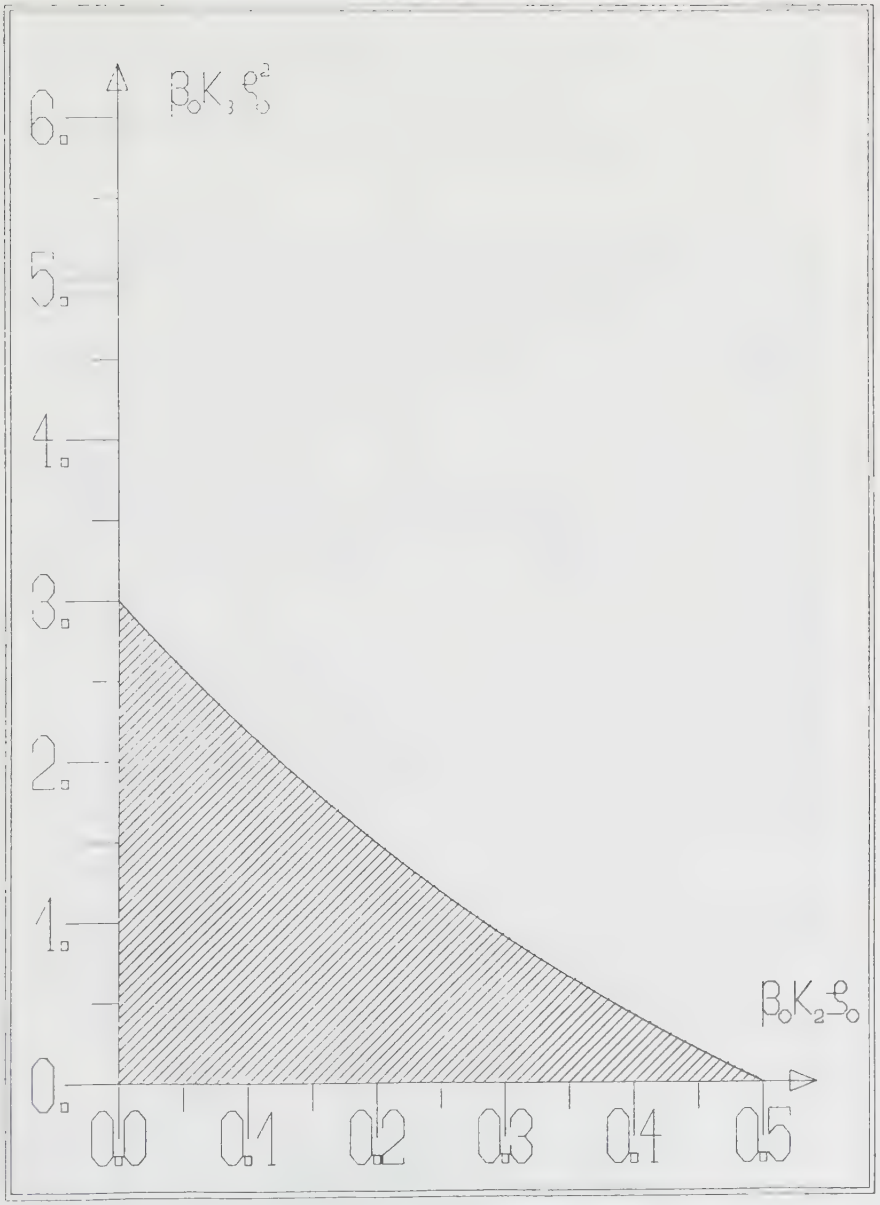


Abbildung II/1

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \vartheta_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_3 \vartheta_0^2$, für die Satz II.1 mit R = 2 die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 ist schraffiert.

Anmerkung: Wenn man berücksichtigt, daß im Falle $R \leq 2$, $\mu_0 < \frac{1}{2}$ (wie schon beim Newton-Verfahren kurz erwähnt) die Inversen $[F'(x)]^{-1}$ für alle $x \in S_0$ existieren und gleichmäßig beschränkt sind, da

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \leq \frac{\|[F'(x_0)]^{-1}\|}{1 - \|[F'(x_0)]^{-1}\| \; K_2 \|x - x_0\|} \leq \frac{\beta_0}{1 - 2\beta_0 K_2 \delta_0}$$

$$= \frac{\beta_0}{1 - 2\mu_0}$$

so erhält man für diese Fälle zusammen mit dem folgenden Satz unmittelbar die kubische Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens. Die in der Originalarbeit von Döring [4] bewiesene schwache Konvergenz von der Ordnung 3 hätte sich also unter den Voraussetzungen des dortigen Satzes leicht verschärfen lassen.

Satz II.3: Sei X ein Banach-Raum und $S \subset X$ offen und konvex. $F: S \to X$ sei auf S dreimal stetig Fréchet-differenzierbar mit

$$\sup_{x \in S} \|F''(x)\| \leq K_2 \quad ; \quad \sup_{x \in S} \|F'''(x)\| \leq K_3$$

Die durch $x_0 \in S$ und

$$x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \frac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n) \left\{[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\right\}^{(2)}$$

rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiere und es gelte $x_n \in S \; \forall \, n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$, und $F(x^*) = \theta$. Die Inversen $[F'(x_n)]^{-1}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt. Dann konvergiert die Folge $\{x_n\}$ von der Ordnung 3.

Beweis:
Es ist

$$F(x_n) + F'(x_n)\, c_n = \theta \tag{2.23}$$

$$F(x_n) + F'(x_n)\, t_n + \frac{1}{2} F''(x_n)\, c_n^{(2)} = \theta \tag{2.24}$$

mit

$$c_n := -[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \tag{2.25}$$

$$t_n := x_{n+1} - x_n = c_n - \frac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)\, c_n^{(2)} \tag{2.26}$$

Also:

$$\|x^* - x_{n+1}\| = \|x^* - x_n - t_n\|$$

$$\leq \|[F'(x_n)]^{-1}\| \left\|F(x_n) + F'(x_n)\, t_n^* + \frac{1}{2} F''(x_n)\, c_n^{(2)} - F(x^*)\right\|$$

mit $t_n^* := x^* - x_n$ und $F(x^*) = \theta$ (2.27)

$$\leq \|[F'(x_n)]^{-1}\| \left\{\|F(x_n) + F'(x_n)\, t_n^* + \frac{1}{2} F''(x_n)\, t_n^{*(2)} - F(x^*)\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \|F''(x_n)\| \, \|c_n - t_n^*\| \, \|c_n + t_n^*\| \right\}$$

Weiter:

$$\|c_n - t_n^*\| = \|-[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - t_n^*\| \tag{2.28}$$

$$\leq \|[F'(x_n)]^{-1}\| \; \|F(x_n) + F'(x_n)\, t_n^* - F(x^*)\|$$

$$\leq \|[F'(x_n)]^{-1}\| \; \frac{1}{2} K_2 \|t_n^*\|^2$$

$$\|c_n + t_n^*\| \leq \|c_n - t_n^*\| + 2\|t_n^*\| \tag{2.29}$$

$$\leq \|[F'(x_n)]^{-1}\| \; \frac{1}{2} K_2 \|t_n^*\|^2 + 2\|t_n^*\| \quad \text{mit (2.28)}$$

Aus (2.27) - (2.29) folgt also:

$$\|x^* - x_{n+1}\| \leq \left\{\frac{1}{6} K_3 \|[F'(x_n)]^{-1}\| + \frac{1}{8} K_2^3 \|[F'(x_n)]^{-1}\|^3 \|t_n^*\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} K_2^2 \|[F'(x_n)]^{-1}\|^2 \right\} \|x^* - x_n\|^3 \tag{2.30}$$

Sind die $\|[F'(x_n)]^{-1}\|$ für alle x_n gleichmäßig beschränkt, so folgt hieraus die Konvergenzordnung 3. ■

Diskussion: Betrachtet man noch einmal den Beweis zu Satz II.1 über das Tschebyscheff-Verfahren, und fragt man sich nach dem "schwächsten Glied der Beweiskette", so stellt man fest, daß dies offenbar in der Abschätzung der Norm

$$\| F(x_{n+1}) \|$$

liegt, die weit ungünstiger ausfällt als die analoge Abschätzung im Satz über das Newton-Verfahren, da das Tschebyscheff-Verfahren im Gegensatz zu letzterem nicht als abgebrochene Taylorentwicklung des Operators $F(x)$ um x_n geschrieben werden kann. Dieses Ziel erreicht man erst durch gewisse Umformungen, wodurch aber ein Teil der hierdurch erreichten Abschätzungsgenauigkeit wieder verlorengeht. Die Schwierigkeiten bei der Abschätzung der $\|F_{n+1}\|$ wirken sich dann aber wieder auf die Abschätzung von $\|c_{n+1}\|$ und somit über die Abschätzung von $\|t_{n+1}\|$ auf $\|[F'(x_{n+2})]^{-1}\|$ aus.
Man kann nun versuchen, diese Schwierigkeiten durch folgende Überlegung zu umgehen: Ist für eine Startnäherung x_0 die Konvergenz des Newton-Verfahrens gesichert, so erhält man für dieses eine Iterationsfolge $\{x_n\}$ sowie auf Grund der besonderen Eigenschaften des Newton-Verfahrens recht gute Abschätzungen für die Größen $\|F(x_n)\|$ und $\|[F'(x_n)]^{-1}\|$. Startet man nun von x_0 aus das Tschebyscheff-Verfahren, so liefert dieses eine Iterationsfolge $\{y_n\}$. Sofern diese Folge konvergiert, kann man vermuten, daß sich die x_n und y_n i.a. nach wenigen Schritten kaum mehr voneinander unterscheiden, da dann wegen $x_n \to x^*$, $y_n \to x^*$ gilt $\|x_n - y_n\| \to 0$. Für "kleines" $\|x_n - y_n\|$ kann man die gesuchten Größen $\|F(y_n)\|$ und $\|[F'(y_n)]^{-1}\|$ aber recht genau durch die bekannten, guten Abschätzungen für die $\|F(x_n)\|$ und $\|[F'(x_n)]^{-1}\|$ abschätzen. Die beweistechnisch besonders nützlichen Eigenschaften des Newton-Verfahrens lassen sich so bis zu einem gewissen Grade auf das Tschebyscheff-Verfahren übertragen, das in gewisser Weise als ein "gestörtes" Newton-Verfahren behandelt wird. Insbesondere erweist sich bei dieser Beweismethode die Voraussetzung der dreimaligen Differenzierbarkeit des Operators als überflüssig, da diese Forderung für die Konvergenz des Newton-Verfahrens nicht notwendig ist.

Zum Beweis dieses Satzes, der die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens unter äußerst schwachen Voraussetzungen garantiert, sind zunächst einige als Sätze formulierte Vorüberlegungen notwendig.

Satz II.4: Sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen und $S \subset M$ konvex. $F: M \to X$ sei eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist mit

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$$

Weiter seien:

$$N(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x)$$
$$\gamma(x) := \|[F'(x)]^{-1} F(x)\|$$
$$\beta(x) := \|[F'(x)]^{-1}\|$$
$$\delta(x) := \|[F'(x)]^{-1}\| \, \|F(x)\|$$

Es seien nun x, $x + \Delta x \in S$ und $[F'(x)]^{-1}$ existiere, sei linear und beschränkt, und es gelte

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \; K_2 \; \|\Delta x\| < 1$$

d.h. $$\beta(x) \; K_2 \; \|\Delta x\| < 1$$

Dann gilt:

(2.31) $[F'(x+\Delta x)]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt.

$$(2.32) \qquad \beta(x+\Delta x) \leq \frac{\beta(x)}{1 - \beta(x) K_2 \|\Delta x\|}$$

$$(2.33) \qquad \|N(x+\Delta x) - N(x)\| \leq \frac{\beta(x) K_2 \|\Delta x\| \left(\mathcal{S}(x) + \frac{1}{2} \|\Delta x\| \right)}{1 - \beta(x) K_2 \|\Delta x\|}$$

$$(2.34) \qquad \gamma(x+\Delta x) \leq \frac{\mathcal{S}(x) + \left(1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \|\Delta x\|\right) \|\Delta x\|}{1 - \beta(x) K_2 \|\Delta x\|}$$

Beweis: (2.31) und (2.32) folgen aus dem Banach-Lemma (Satz I.1) mit Hilfe von Überlegungen, die analog sind zu denen beim Beweis von $(\text{Ind } 1)_n$ von Teil (B) des Beweises von Satz I.2 (über das Newton-Verfahren).

Zu (2.33):

$$\begin{aligned}
\|N(x+\Delta x) - N(x)\| &= \|x + \Delta x - [F'(x+\Delta x)]^{-1} F(x+\Delta x) - x + \\
&\quad + [F'(x)]^{-1} F(x)\| \\
&\leq \|[F'(x+\Delta x)]^{-1}\| \, \|F'(x+\Delta x)(x+\Delta x) - F(x+\Delta x) - F'(x+\Delta x)x + \\
&\quad + F'(x+\Delta x)[F'(x)]^{-1} F(x)\| \\
&= \|[F'(x+\Delta x)]^{-1}\| \, \|F(x+\Delta x) + F'(x+\Delta x)(x - (x+\Delta x)) - F(x) + \\
&\quad + [I - F'(x+\Delta x)[F'(x)]^{-1}] F(x)\| \\
&\leq \|[F'(x+\Delta x)]^{-1}\| \left\{ \frac{1}{2} \; K_2 \; \|\Delta x\|^2 + \|I - F'(x+\Delta x)[F'(x)]^{-1}\| \, \|F(x)\| \right\} \\
&\leq \|[F'(x+\Delta x)]^{-1}\| \left\{ \frac{1}{2} \; K_2 \; \|\Delta x\|^2 + \|F'(x) - F'(x+\Delta x)\| \, \|[F'(x)]^{-1}\| \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \|F(x)\| \right\} \\
&\leq \|[F'(x+\Delta x)]^{-1}\| \left\{ \frac{1}{2} \; K_2 \; \|\Delta x\|^2 + K_2 \; \|\Delta x\| \, \|[F'(x)]^{-1}\| \, \|F(x)\| \right\} \\
&\leq \beta(x+\Delta x) \left\{ \frac{1}{2} K_2 \|\Delta x\|^2 + K_2 \|\Delta x\| \, \beta(x) \|F(x)\| \right\} \\
&\leq \frac{\beta(x) \left\{ \frac{1}{2} K_2 \|\Delta x\|^2 + K_2 \|\Delta x\| \, \mathcal{S}(x) \right\}}{1 - \beta(x) K_2 \|\Delta x\|} \\
&= \frac{\beta(x) K_2 \|\Delta x\| \left(\mathcal{S}(x) + \frac{1}{2} \|\Delta x\| \right)}{1 - \beta(x) K_2 \|\Delta x\|}
\end{aligned}$$

Zu (2.34):

$$\begin{aligned}
\gamma(x+\Delta x) &= \|[F'(x+\Delta x)]^{-1} F(x+\Delta x)\| \\
&= \|[I - [F'(x)]^{-1}[F'(x) - F'(x+\Delta x)]]^{-1} [F'(x)]^{-1} \{ F(x+\Delta x) - F(x) - \\
&\quad - F'(x)\Delta x + F(x) + F'(x)\Delta x \}\| \\
&\leq \|[I - [F'(x)]^{-1}[F'(x) - F'(x+\Delta x)]]^{-1}\| \, \|[F'(x)]^{-1} \{ F(x+\Delta x) - \\
&\quad - F(x) - F'(x)\Delta x \} + [F'(x)]^{-1} F(x) + \Delta x\|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{1 - \beta(x) K_2 \|\Delta x\|} \left\{ \beta(x) \tfrac{1}{2} K_2 \|\Delta x\|^2 + \|[F'(x)]^{-1} F(x)\| + \|\Delta x\| \right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \beta(x) K_2 \|\Delta x\|^2 + \gamma(x) + \|\Delta x\|}{1 - \beta(x) K_2 \|\Delta x\|}$$

$$\leq \frac{\mathcal{S}(x) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \|\Delta x\|) \|\Delta x\|}{1 - \beta(x) K_2 \|\Delta x\|}$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Satz II.5: Es seien $\delta_n \geq 0$, $\mathcal{S}_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Es seien $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < \infty$. Es gelte $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n < \infty$. Es sei δ_0 vorgegeben und es gelte $\delta_{n+1} \leq \alpha \delta_n + \beta \mathcal{S}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$.

Beweis: Man hat $\delta_{n+1} \leq \alpha \delta_n + \beta \mathcal{S}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Also:

$$\sum_{n=1}^{N+1} \delta_n \leq \alpha \sum_{n=1}^{N} \delta_n + \alpha \delta_0 + \beta \sum_{n=0}^{N} \mathcal{S}_n$$

$$(1 - \alpha) \sum_{n=1}^{N} \delta_n + \delta_{N+1} \leq \alpha \delta_0 + \beta \sum_{n=0}^{N} \mathcal{S}_n$$

$$(1 - \alpha) \sum_{n=1}^{N+1} \delta_n \leq \alpha \delta_0 + \beta \sum_{n=0}^{N} \mathcal{S}_n \quad , \text{ da } (1 - \alpha) \delta_{N+1} \leq \delta_{N+1}$$

$$\leq \alpha \delta_0 + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

Da dies für alle $N+1 \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$(1 - \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \leq \alpha \delta_0 + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

Also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \leq \delta_0 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \delta_0 + \frac{\beta}{1 - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

$$\leq \frac{1}{1 - \alpha} \left(\delta_0 + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n \right) < \infty$$

Somit muß gelten $\delta_n \to 0$. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Satz II.6: Sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen und $S \subset M$ konvex. $F: M \to X$ sei eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist mit

$$\sup_{x \in S} \|F''(x)\| \leq K_2$$

Weiter seien:

$$N(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x)$$

$$T(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x) - \tfrac{1}{2} [F'(x)]^{-1} F''(x) \left[[F'(x)]^{-1} F(x) \right]^{(2)}$$

$$\gamma(x) := \|[F'(x)]^{-1} F(x)\|$$

$$\beta(x) := \|[F'(x)]^{-1}\|$$

$$\mathcal{S}(x) := \|[F'(x)]^{-1}\| \|F(x)\|$$

Es seien nun x, $x + \Delta x \in S$ und $[F'(x)]^{-1}$ existiere, sei linear und beschränkt und es gelte

$$\beta(x) K_2 \|\Delta x\| < 1$$

Dann gilt:

$$\| T(x+\Delta x) - N(x+\Delta x)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\frac{\beta(x)K_2\mathcal{S}(x) + \left(1+\frac{1}{2}\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)\beta(x)K_2\|\Delta x\|}{\left(1-\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)^3} *$$

$$* \left\{ \mathcal{S}(x) + \left(1+\frac{1}{2}\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)\|\Delta x\| \right\}$$

Beweis:
Es ist:

$$\begin{aligned}\|T(x) - N(x)\| &= \|x - [F'(x)]^{-1}F(x) - \frac{1}{2}[F'(x)]^{-1}F''(x)\left[[F'(x)]^{-1}F(x)\right]^{(2)} - \\ &\quad - x + [F'(x)]^{-1}F(x)\| \\ &= \frac{1}{2}\,\|[F'(x)]^{-1}F''(x)\left[[F'(x)]^{-1}F(x)\right]^{(2)}\| \\ &\leq \frac{1}{2}\beta(x)\;K_2\;\gamma^2(x)\end{aligned}$$

Indem man x durch $x+\Delta x$ ersetzt und (2.32), (2.34) aus Satz II.4 beachtet, erhält man die Behauptung:

$$\|T(x+\Delta x) - N(x+\Delta x)\| \leq \frac{1}{2}\beta(x+\Delta x)K_2\gamma^2(x+\Delta x)$$

$$\beta(x+\Delta x) \leq \frac{\beta(x)}{1-\beta(x)K_2\|\Delta x\|}$$

$$\gamma(x+\Delta x) \leq \frac{\mathcal{S}(x) + \left(1+\frac{1}{2}\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)\|\Delta x\|}{1-\beta(x)K_2\|\Delta x\|}$$

■

Nach diesen Vorbetrachtungen kann nun der Satz über das Tschebyscheff-Verfahren bewiesen werden.

Satz II.7: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta_0 \;;\; \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \leq \mathcal{S}_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \|x - x_0\| \leq 2\mathcal{S}_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \mathcal{S}_0 \leq \frac{1}{2}$$

Überdies gelte: (Hierdurch wird $\mu_0 \leq \frac{1}{2}$ weiter eingeschränkt!)
Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch

(2.35) μ_0 sowie $\nu_0 := 0$, $\varepsilon_0 := 0$, $\pi_0 := 1$

und

$$(2.36)\quad \mathcal{P}_n := \frac{1}{2}\,\frac{\mu_n + \left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n}{\left(1-\nu_n\right)^3} + \frac{\nu_n}{1-\nu_n}$$

$$(2.37)\quad \mathcal{Y}_n := \frac{1}{2}\,\frac{\mu_n + \left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n}{\left(1-\nu_n\right)^3}\left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right) + \frac{\frac{1}{2}\nu_n}{1-\nu_n}$$

(2.38) $$\mu_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\mu_n^2}{(1-\mu_n)^2}$$

(2.39) $$\nu_{n+1} := \frac{1}{1-\mu_n}(\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n)$$

(2.40) $$\pi_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\mu_n}{1-\mu_n}\pi_n$$

(2.41) $$\varepsilon_{n+1} := \varphi_n \pi_n + \psi_n \varepsilon_n$$

rekursiv definierten Zahlen μ_n, ν_n, ε_n, π_n, φ_n, ψ_n für $n \leq N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

(2.42) $\nu_n < 1 \quad \forall\ n \leq N$

(2.43) $\varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k \leq 2 \quad \forall\ 1 \leq n \leq N$

(2.44) $\nu_{N+1} \leq \nu_N$

(2.45) $\varepsilon_{N+1} \leq \varepsilon_N$

(2.46) $\psi_N < 1$

(2.47) $$\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \frac{\frac{1}{2}\mu_N}{1-\frac{3}{2}\mu_N}\pi_N \leq 2$$

Dann gilt:

(2.48) Die durch $y_0 := x_0$ und $y_{n+1} := y_n - [F'(y_n)]^{-1} F(y_n) - \frac{1}{2}[F'(y_n)]^{-1} \cdot F''(y_n)[[F'(y_n)]^{-1} F(y_n)]^{(2)}$ rekursiv definierte Folge $\{y_n\}$ existiert, es gilt $y_n \in S_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x^*$.

(2.49) Es gilt $F(x^*) = 0$.

(2.50) Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Zusätzlich zu den durch (2.35) - (2.41) definierten Folgen werden noch die durch

(2.51) β_0, ϑ_0 sowie $\hat{\delta}_0 := 0$

und

(2.52) $$\beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1-\mu_n}$$

(2.53) $$\vartheta_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\mu_n}{1-\mu_n}\vartheta_n$$

(2.54) $$\hat{\delta}_{n+1} := \varphi_n \vartheta_n + \psi_n \hat{\delta}_n$$

rekursiv definierten Folgen $\{\beta_n\}$, $\{\vartheta_n\}$, $\{\hat{\delta}_n\}$ eingeführt.

Es wird zunächst gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (2.35) - (2.41) und (2.51) - (2.54) definierten Zahlen μ_n, ν_n, π_n, ε_n, φ_n, ψ_n, β_n, ϑ_n, $\hat{\delta}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, sowie:

(2.55) $\mu_n \geq 0 \;;\; \mu_{n+1} \leq \mu_n \;;\; \mu_n = \beta_n K_2 \mathcal{S}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(2.56) $\nu_n \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \;;\; \nu_{n+1} \leq \nu_n \;\forall\, n \geq N$

(2.57) $\pi_n \geq 0 \;;\; \pi_{n+1} \leq \frac{1}{2}\pi_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

(2.58) $\varepsilon_n \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \;;\; \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n \quad \forall\, n \geq N$

(2.59) $\beta_n \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

(2.60) $\mathcal{S}_n \geq 0 \;;\; \mathcal{S}_{n+1} \leq \frac{1}{2}\mathcal{S}_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

(2.61) $\delta_n \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

(2.62) $\varphi_n \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

(2.63) $\psi_n \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

Denn: Da die Voraussetzungen des Satzes über das Newton-Verfahren erfüllt sind, erhält man aus Teil (A) des Beweises von Satz I.2 die Existenz von $\{\mu_n\}, \{\beta_n\}, \{\mathcal{S}_n\}$, sowie die Aussagen (2.55), (2.59), (2.60). Aus (2.40) und (2.55) folgt (2.57). Die Aussagen (2.56), (2.58), (2.62) und (2.63) erhält man aus (2.38), (2.39) sowie (2.42), wenn man unter Beachtung von (2.44) und (2.45) berücksichtigt, daß die durch (2.36) und (2.37) definierten Ausdrücke

$$\varphi_n := \varphi_n(\mu_n, \nu_n) \quad ; \quad \psi_n := \psi_n(\mu_n, \nu_n)$$

für $0 \leq \nu_n < 1$ sowie $\mu_n \geq 0$ positiv oder Null sind und unter diesen Bedingungen in μ_n, ν_n monoton fallen, d.h.:

Aus $0 \leq \nu_n < 1$, $0 \leq \nu_{n+1} < 1$; $\mu_n \geq 0$, $\mu_{n+1} \geq 0$

und $\mu_{n+1} \leq \mu_n$; $\nu_{n+1} \leq \nu_n$

folgt $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$; $\psi_{n+1} \leq \psi_n$

(2.61) ergibt sich dann aber unmittelbar aus (2.54). Aus (2.55),(2.56) sowie (2.46) erhält man schließlich noch

(2.64) $\psi_n \leq \psi_N < 1 \quad \forall\, n \geq N$

(2.65) $\varphi_n \leq \varphi_N \quad \forall\, n \geq N$

Für den weiteren Beweis werden nun folgende Bezeichnungen verwendet:

$$T(x) := x - [F'(x)]^{-1}F(x) - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1}F''(x)\big[[F'(x)]^{-1}F(x)\big]^{(2)}$$

$$N(x) := x - [F'(x)]^{-1}F(x)$$

$$\beta(x) := \|[F'(x)]^{-1}\|$$

$$\mathcal{S}(x) := \|[F'(x)]^{-1}\|\,\|F(x)\|$$

Der Satz I.2 (über das Newton-Verfahren) liefert nun die Aussagen:

(2.66) Die durch x_0 und $x_{n+1} := N(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $x_n \in S_0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. Außerdem existiert ein $x^* \in S_0$ mit $x_n \to x^*$ und $F(x^*) = \theta$, wobei x^* die einzige Lösung der Gleichung $F(x) = \theta$ in S_0 ist.

Weiter entnimmt man Teil (B) des Beweises von Satz I.2 die Abschätzungen:

(2.67)
$$\begin{cases} \beta(x_n) \leq \beta_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \mathcal{S}(x_n) \leq \mathcal{S}_n & \forall\, n \geq 1 \\ \beta_n K_2 \mathcal{S}_n = \mu_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \|x_{n+1} - x_n\| \leq \mathcal{S}_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die durch das Tschebyscheff-Verfahren erzeugte Iterationsfolge (deren Existenz noch gezeigt werden muß!!) werde mit $\{y_n\}$ bezeichnet. D.h.: $y_0 := x_0$ und $y_{n+1} := T(y_n)$. Weiter sei $\Delta x_n := y_n - x_n$, d.h. $\Delta x_0 = \theta$ wegen $y_0 = x_0$. Es wird nun gezeigt: Die Folge $\{y_n\}$ existiert und es gilt $y_n \in S_0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$. Hierfür genügt es durch vollständige Induktion nach n zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$(\text{Ind } 1)_n$ $\quad \|\Delta x_n\| \le \hat{\delta}_n$

$(\text{Ind } 2)_n$ $\quad \hat{\delta}_n \le \pi_n \delta_0 \quad ; \quad \delta_n \le \pi_n \delta_0$

$(\text{Ind } 3)_n$ $\quad y_n \in S_0$

$(\text{Ind } 4)_n$ $\quad \beta_n K_2 \hat{\delta}_n = \nu_n < 1$

$(\text{Ind } 5)_n$ $\quad [F'(y_n)]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$$\|[F'(y_n)]^{-1}\| \le \frac{\beta_n}{1 - \beta_n K_2 \hat{\delta}_n} = \frac{\beta_n}{1 - \nu_n}$$

Die Induktionsverankerung ergibt sich unmittelbar aus den Voraussetzungen und Definitionen. Schluß von n auf n+1:
Wegen $(\text{Ind } 3)_n$, $(\text{Ind } 5)_n$ existiert $y_{n+1} := T(y_n)$. Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_n$, $(\text{Ind } 4)_n$ sowie (2.67) und unter Heranziehung von Satz II.6 sowie (2.33) aus Satz II.4 erhält man:

$$\begin{aligned}
\|\Delta x_{n+1}\| &= \|y_{n+1} - x_{n+1}\| \\
&= \|T(y_n) - N(x_n)\| \\
&\le \|T(x_n + \Delta x_n) - N(x_n + \Delta x_n)\| + \|N(x_n + \Delta x_n) - N(x_n)\| \\
&\le \frac{1}{2} \frac{\beta(x_n) K_2 \delta(x_n) + (1 + \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|)\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|}{(1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|)^3} \cdot \\
&\quad \cdot \{\delta(x_n) + (1 + \tfrac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|)\|\Delta x_n\|\} + \\
&\quad + \frac{\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\| (\delta(x_n) + \frac{1}{2}\|\Delta x_n\|)}{1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|} \\
&\le \frac{1}{2} \frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1 - \nu_n)^3} \{\delta_n + (1 + \tfrac{1}{2}\nu_n)\hat{\delta}_n\} + \\
&\quad + \frac{\nu_n (\delta_n + \frac{1}{2}\hat{\delta}_n)}{1 - \nu_n} \\
&\le \hat{\delta}_{n+1} \qquad \text{wegen (2.36), (2.37) und (2.54)}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 1)_{n+1}$. Aus $(\text{Ind } 2)_n$ folgt:

$$\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \delta_n + \psi_n \hat{\delta}_n \le (\varphi_n \pi_n + \psi_n \varepsilon_n)\delta_0 = \varepsilon_{n+1} \delta_0 \qquad \text{nach (2.41)}$$

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\mu_n}{1 - \mu_n} \delta_n \le \frac{1}{2} \frac{\mu_n}{1 - \mu_n} \pi_n \delta_0 = \pi_{n+1} \delta_0 \qquad \text{nach (2.40)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 2)_{n+1}$. Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ und $(\text{Ind } 2)_{n+1}$ sowie (2.38), (2.55) und (2.67) erhält man:

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - x_0\| &\le \|y_{n+1} - x_{n+1}\| + \sum_{k=0}^{n} \|x_{k+1} - x_k\| \le \hat{\delta}_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \delta_k \\
&\le (\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \pi_k)\delta_0
\end{aligned}$$

Für $n+1 \le N$ folgt hieraus nach (2.43): $\|y_{n+1} - x_0\| \le 2\,\mathcal{E}_0 \Rightarrow y_{n+1} \in S_0$. Ist $n+1 > N$, so hat man:

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - x_0\| &\le \Big(\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \pi_k\Big)\,\mathcal{E}_0 \\
&\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k\Big)\,\mathcal{E}_0 \qquad \text{wegen (2.57), (2.58)} \\
&\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \pi_k\Big)\,\mathcal{E}_0 \\
&\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \frac{\frac{1}{2}\mu_N}{1-\mu_N}\pi_N \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\frac{1}{2}\mu_N}{1-\mu_N}\Big)^k\Big)\,\mathcal{E}_0 \\
&\qquad\qquad \text{wegen (2.40), (2.55)} \\
&\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \frac{\frac{1}{2}\mu_N}{1-\frac{3}{2}\mu_N}\pi_N\Big)\,\mathcal{E}_0 \\
&\le 2\,\mathcal{E}_0 \qquad \text{wegen (2.47)}
\end{aligned}$$

Also gilt auch in diesem Falle $y_{n+1} \in S_0$. Daraus folgt $(\text{Ind } 3)_{n+1}$. Mit (2.52), (2.54) und $(\text{Ind } 4)_n$ folgt:

$$\beta_{n+1} K_2 \hat{\delta}_{n+1} = \frac{\beta_n K_2}{1-\mu_n}\{\varphi_n \mathcal{E}_n + \psi_n \hat{\delta}_n\} \le \frac{1}{1-\mu_n}\{\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n\}$$

$$= \nu_{n+1} \qquad \text{nach (2.39)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 4)_{n+1}$. Unter Beachtung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$, $(\text{Ind } 4)_{n+1}$ und $[F'(y_{n+1})]^{-1} = [F'(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})]^{-1}$ erhält man unter Heranziehung von (2.31) aus Satz II.4 schließlich $(\text{Ind } 5)_{n+1}$. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Nun ist für $n \ge N$ nach (2.64), (2.65): $\psi_n \le \psi_N < 1$ und $\varphi_n \le \varphi_N$, d.h. $\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \mathcal{E}_n + \psi_n \hat{\delta}_n \le \varphi_N \mathcal{E}_n + \psi_N \hat{\delta}_n$. Wegen $\psi_N < 1$ erhält man aus Satz II.5: $\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_n = 0$, d.h. $\|y_n - x_n\| \to 0$, d.h. da $x_n \to x^*$ nach (2.66) gilt, gilt auch $y_n \to x^*$. Zusammen mit (2.66) folgen hieraus die Behauptungen. Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Bevor die etwas unübersichtlichen Voraussetzungen dieses Satzes II.7 in Satz II.9 zu einer einfachen Bedingung zusammengefaßt werden, soll noch eine Fehlerschranke für das Tschebyscheff-Verfahren angegeben werden, deren Konstruktion sich unmittelbar aus dem obigen Beweis von Satz II.7 ergibt.

Satz II.8: Es seien die Voraussetzungen von Satz II.7 erfüllt. Dann gilt für die von dem Tschebyscheff-Verfahren erzeugte Iterationsfolge $\{y_n\}$ mit $y_n \to x^*$ die Fehlerabschätzung:

$$(2.68)\qquad \|x^* - y_{n+1}\| \le \tilde{\beta}_n \left\{2 K_2 \left(\frac{\tilde{\mathcal{E}}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\,\tilde{\beta}_n K_2 \tilde{\mathcal{E}}_n}}\right)^2 + \frac{1}{2} K_2 \tilde{\mathcal{E}}_n^2\right\}$$

Dabei seien β_n, $\mathcal{E}_n$, ν_n, $\hat{\delta}_n$ wie in Satz II.7 angegeben rekursiv definiert und

$$(2.69)\qquad \tilde{\beta}_n := \frac{\beta_n}{1-\nu_n}\,; \qquad \tilde{\mathcal{E}}_n := \frac{\mathcal{E}_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\hat{\delta}_n}{1-\nu_n}$$

In dieser Form stellt (2.68) eine a-priori-Fehlerabschätzung dar. Setzt man hingegen

$$(2.70) \qquad \widetilde{\beta}_n := \|[F'(y_n)]^{-1}\| \quad ; \quad \widetilde{\varepsilon}_n := \|[F'(y_n)]^{-1} F(y_n)\|$$

so erhält man eine a-posteriori-Fehlerabschätzung.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} &F(y_n) + F'(y_n)\, c_n = 0 \\ &F(y_n) + F'(y_n)\, t_n + \tfrac{1}{2} F''(y_n)\, c_n^{(2)} = 0 \\ &\text{mit } c_n := -[F'(y_n)]^{-1} F(y_n) \\ &\quad t_n := y_{n+1} - y_n \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \|x^* - y_{n+1}\| &= \|x^* - y_n - t_n\| \\ &\le \|[F'(y_n)]^{-1}\| \; \|F(y_n) + F'(y_n)\, t_n^* + \tfrac{1}{2} F''(y_n)\, c_n^{(2)}\| \\ &\quad \text{mit } t_n^* := x^* - y_n \\ &\le \|[F'(y_n)]^{-1}\| \left\{ \|F(y_n) + F'(y_n)\, t_n^* - F(x^*)\| + \tfrac{1}{2} K_2 \|c_n\|^2 \right\} \\ &\le \|[F'(y_n)]^{-1}\| \left\{ \tfrac{1}{2} K_2 \|x^* - y_n\|^2 + \tfrac{1}{2} K_2 \|c_n\|^2 \right\} \end{aligned}$$

Wählt man zunächst die Darstellung (2.70) für $\widetilde{\beta}_n$, $\widetilde{\varepsilon}_n$, so liefert die Beziehung (1.12) des Beweises von Satz I.4:

$$\|x^* - y_n\| \le \frac{2\,\widetilde{\varepsilon}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\,\widetilde{\beta}_n K_2\,\widetilde{\varepsilon}_n}}$$

Hieraus folgt dann unmittelbar (2.69). Die Darstellung (2.69) ist nun aber eine Abschätzung für die $\widetilde{\beta}_n$, $\widetilde{\varepsilon}_n$ der Darstellung (2.70), die man sofort aus dem Beweis von Satz II.7 und Satz II.4 erhält. Damit ist (2.68) auch für die Darstellung (2.69) bewiesen. ∎

Im folgenden Satz werden die Voraussetzungen von Satz II.7 in Form einer einfachen Bedingung "abgeschätzt".

Satz II.9: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \le \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \le \varepsilon_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \|x - x_0\| \le 2\varepsilon_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \le K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \varepsilon_0 \le 0.42115$$

Dann gilt:

(2.71) Die durch x_0 und $x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \frac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n) \cdot [[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)}$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

(2.72) Es gilt $F(x^*) = 0$.

(2.73) Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Es ist für den angegebenen Wert für μ_0 die Gültigkeit der Vor-

aussetzungen von Satz II.7 zu überprüfen. Dies geschieht so, daß man von μ_0 ausgehend rekursiv die durch (2.35) - (2.41) definierten Größen für $n = 0,1,2,\ldots$ berechnet und nach jedem Schritt die Bedingungen (2.42) - (2.47) überprüft. Sind diese Bedingungen dann für ein $N \in \mathbb{N}$ erfüllt, so folgt aus Satz II.7 die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens. Damit dieser "Entscheidungsalgorithmus" notwendigerweise nach einer endlichen Anzahl von Rechenschritten beendet ist, kann man sich für N eine Höchstgrenze setzen, etwa N = 10. D.h. wenn man nach 10 Schritten die Gültigkeit von (2.44) - (2.47) noch nicht erhalten hat, so betrachtet man die Konvergenzbedingung als nicht erfüllt. Hierdurch läßt sich bei vorgegebenem N für jedes μ_0 stets nach endlich vielen Rechenschritten die Entscheidung treffen, ob die Voraussetzungen von Satz II.7 erfüllt sind. Dieser rekursiv-algorithmische Entscheidungsprozess eignet sich sehr gut zur Programmierung. Man kann die Voraussetzungen von Satz II.7 daher als (Fortran-) Funktionsunterprogramm schreiben. Die Funktion hat den Typ "Logical", wobei der Funktionswert ".TRUE." bedeutet, daß die Voraussetzungen von Satz II.7 erfüllt sind, während der Funktionswert ".FALSE." besagt, daß man zumindest nicht sicher sein kann, daß dies der Fall ist. Wenn man mit Hilfe des nachstehend angegebenen Fortran-Programms die Gültigkeit der Voraussetzungen des Satzes II.7 für $\mu_0 = 0.42115$ überprüft, wobei man die Zahl der höchstens durchzuführenden "Rekursionsschritte" etwa auf N := 10 begrenzt, so erhält man die Behauptung, d.h. für $\mu_0 = 0.42115$ sind die Voraussetzungen von Satz II.7 sicher erfüllt. Kleinere Werte von μ_0 kann man durch geeignete Vergrößerung der Konstanten K_2 stets auf 0.42115 vergrößern. ■

Fortran-Programm zur Überprüfung der Voraussetzungen von Satz II.7:

```
      LOGICAL FUNCTION KOVT1(MUEØ,N)
      REAL MUEØ,NUEØ,EPSØ,PIØ,MUE1,NUE1,EPS1,PI1
      REAL SUPI,S1,S2,PHI,PSI,A,B,C
      INTEGER K,N
      IF (MUEØ.GT.Ø.5) GO TO 2Ø
      IF (MUEØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      NUEØ=Ø.Ø
      EPSØ=Ø.Ø
      PIØ=1.Ø
      SUPI=Ø.Ø
      K=Ø
   1Ø CONTINUE
      S1=SUPI+EPSØ
      IF (NUEØ.GE.1.Ø) GO TO 2Ø
      IF (S1.GT.2.Ø) GO TO 2Ø
      A=MUEØ+(1.Ø+Ø.5*NUEØ)*NUEØ
      B=1.Ø-NUEØ
      C=1.Ø-MUEØ
      PHI=Ø.5*A/(B*B*B)+NUEØ/B
      PSI=Ø.5*(A*(1.Ø+Ø.5*NUEØ)/(B*B*B)+NUEØ/B)
      MUE1=Ø.5*MUEØ*MUEØ/(C*C)
      NUE1=(PHI*MUEØ+PSI*NUEØ)/C
      PI1=Ø.5*MUEØ*PIØ/C
      EPS1=PHI*PIØ+PSI*EPSØ
      SUPI=SUPI+PIØ
```

```
      S2=SUPI+EPSØ+Ø.5*MUEØ*PIØ/(1.Ø-1.5*MUEØ)
      IF (NUE1.GT.NUEØ) GO TO 15
      IF (EPS1.GT.EPSØ) GO TO 15
      IF (PSI.GE.1.Ø) GO TO 15
      IF (S2.GT.2.Ø) GO TO 15
      KOVT1=.TRUE.
      RETURN
   15 K=K+1
      IF (K.GT.N+1) GO TO 2Ø
      MUEØ=MUE1
      NUEØ=NUE1
      PIØ=PI1
      EPSØ=EPS1
      GO TO 1Ø
   2Ø CONTINUE
      KOVT1=.FALSE.
      RETURN
      END
```

Wenn auch die Voraussetzungen des Satzes über das Tschebyscheff-Verfahren die Existenz und Beschränktheit der dritten Ableitung nicht enthalten und damit zu schwach sind, als daß man hieraus die kubische Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens beweisen könnte, so zeigt Satz II.11 doch, daß auch in diesem Falle das Verfahren noch mindestens superquadratisch konvergiert und i.a. in der Konvergenzgeschwindigkeit dem Newton-Verfahren überlegen ist. Um die kubische Konvergenz zu sichern, muß zwar die Existenz und Stetigkeit der dritten Ableitung auf S garantiert sein, sie braucht aber weder berechnet noch abgeschätzt zu werden.
Zur Vorbereitung auf Satz II.11 dient der folgende Satz:

Satz II.10: Sei X ein Banach-Raum und $S \subset X$ offen und konvex. $F: S \to X$ sei eine Abbildung, die auf S zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Sei $x_0 \in S$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} F''(x_0)(x - x_0)^{(2)} - F(x) \|}{\| x - x_0 \|^2} = 0$$

Beweis: Nach der Taylorformel für Operatoren in Banach-Räumen (1.33) gilt unter den Voraussetzungen des Satzes

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} F''(x_0)(x - x_0)^{(2)} + \vartheta(x - x_0)$$

mit

$$\| \vartheta(x - x_0) \| \leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{2} \| F''(x_0 + t(x - x_0)) - F''(x_0) \| \, \| x - x_0 \|^2$$

Hieraus folgt wegen der Stetigkeit von F'' dann unmittelbar die Behauptung. ■

Satz II.11: Sei X ein Banach-Raum und $S \subset X$ offen und konvex. $F: S \to X$ sei auf S zweimal stetig Fréchet-differenzierbar mit $\sup_{x \in S} \| F''(x) \| \leq K_2$. Die durch $x_0 \in S$ und

$$x_{k+1} := x_k - [F'(x_k)]^{-1} F(x_k) - \frac{1}{2} [F'(x_k)]^{-1} F''(x_k) \left([F'(x_k)]^{-1} F(x_k) \right)^{(2)}$$

rekursiv definierte Folge $\{x_k\}$ existiere und es gelte $x_k \in S \; \forall k \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{k \to \infty} x_k = z \in S$ und $F(z) = \Theta$. Die Inversen $[F'(x_k)]^{-1}$ seien für alle x_k, $k \in \mathbb{N}$, gleichmäßig beschränkt. Dann gilt:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\left\| x_K - z - \left[F'(x_K)\right]^{-1} F(x_K) - \frac{1}{2}\left[F'(x_K)\right]^{-1} F''(x_K)\left[\left[F'(x_K)\right]^{-1} F(x_K)\right]^{(2)}\right\|}{\left\| x_K - z\right\|^2} = 0$$

Beweis: Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$F_K := F(x_K) \quad , \quad F'_K := F'(x_K) \quad , \quad F'^{-1}_K := \left[F'(x_K)\right]^{-1}$$
$$F''_K := F''(x_K)$$

Zunächst wird gezeigt:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\left\| x_K - z - F'^{-1}_K F_K\right\|}{\left\| x_K - z\right\|} = 0$$

Denn:

$$\begin{aligned}\left\| x_K - z - F'^{-1}_K F_K\right\| &\le \left\| F'^{-1}_K\right\| \left\| F'_K\left[x_K - z\right] - F_K\right\| \\ &= \left\| F'^{-1}_K\right\| \left\| F(z) - F(x_K) + F'(x_K)\left[x_K - z\right]\right\| \\ &\le \left\| F'^{-1}_K\right\| \left\{\left\| F(z) + F'(z)\left[x_K - z\right] - F(x_K)\right\| + \right. \\ &\quad \left. + \left\| F'(x_K) - F'(z)\right\| \left\| x_K - z\right\|\right\}\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{K\to\infty} \left\| F'(x_K) - F'(z)\right\| = 0$ und

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\left\| F(z) + F'(z)\left[x_K - z\right] - F(x_K)\right\|}{\left\| x_K - z\right\|} = 0$$

(Letzteres ist die Definition der Differenzierbarkeit von F im Punkte z) folgt die erste Behauptung. Nun zum eigentlichen Beweis:

$$\begin{aligned}&\left\| x_K - z - F'^{-1}_K F_K - \frac{1}{2} F'^{-1}_K F''_K \left[F'^{-1}_K F_K\right]^{(2)}\right\| \le \\ &\le \left\| F'^{-1}_K\right\| \left\| F(z) - F(x_K) + F'(x_K)\left[x_K - z\right] - \frac{1}{2} F''(x_K) * \right. \\ &\quad \left. *\left[\left[F'(x_K)\right]^{-1} F(x_K)\right]^{(2)}\right\| \\ &= \left\| F'^{-1}_K\right\| \left\| F(z) - F(x_K) + F'(x_K)\left[x_K - z\right] - \frac{1}{2} F''_K\left[x_K - z\right]^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} F''_K\left[\left[x_K - z + F'^{-1}_K F_K\right], \left[x_K - z - F'^{-1}_K F_K\right]\right]\right\| \\ &= \left\| F'^{-1}_K\right\| \left\| F(z) - F(x_K) + F'(z)\left[x_K - z\right] + \frac{1}{2} F''(z)\left[x_K - z\right]^{(2)} + \right. \\ &\quad + \left[F'(x_K) - F'(z)\right]\left[x_K - z\right] - \frac{1}{2}\left[F''(z) + F''(x_K)\right]\left[x_K - z\right]^{(2)} + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} F''(x_K)\left[\left[x_K - z + F'^{-1}_K F_K\right], \left[x_K - z - F'^{-1}_K F_K\right]\right]\right\| \\ &= \left\| F'^{-1}_K\right\| \left\| F(z) - F(x_K) + F'(z)\left[x_K - z\right] + \frac{1}{2} F''(z)\left[x_K - z\right]^{(2)} + \right. \\ &\quad + \left[F'(x_K) - F'(z)\right]\left[x_K - z\right] - F''(z)\left[\left[x_K - z\right], \left[x_K - z\right]\right] - \\ &\quad - \frac{1}{2}\left[F''(x_K) - F''(z)\right]\left[x_K - z\right]^{(2)} + \\ &\quad + \frac{1}{2} F''(x_K)\left[\left[x_K - z\right], \left[x_K - z - F'^{-1}_K F_K\right]\right] + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} F''(x_K)\left[\left[F'^{-1}_K (F_K - F(z))\right], \left[x_K - z - F'^{-1}_K F_K\right]\right] \right. \\ &\le \left\| F'^{-1}_K\right\| \left\{\left\| F(z) + F'(z)\left[x_K - z\right] + \frac{1}{2} F''(z)\left[x_K - z\right]^{(2)} - F(x_K)\right\| + \right. \\ &\quad + \left\| F'(z) + F''(z)\left[x_K - z\right] - F'(x_K)\right\| \left\| x_K - z\right\| + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\| F''(z) - F''(x_K)\right\| \left\| x_K - z\right\|^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\| F''_K\right\| \left\| x_K - z\right\| \left\| x_K - z - F'^{-1}_K F_K\right\| + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left\| F''_K\right\| \left\| F'^{-1}_K\right\| \left\| F(x_K) - F(z)\right\| \left\| x_K - z - F'^{-1}_K F_K\right\| \right\}\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\| F(z) + F'(z)[x_K - z] + \frac{1}{2} F''(z)[x_K - z]^{(2)} - F(x_K)\|}{\| x_K - z\|^2} = 0$$

nach Satz II.10.

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\| F'(z) + F''(z)[x_K - z] - F'(x_K)\|}{\| x_K - z\|} = 0$$

da $F'(z)$ im Punkte z differenzierbar ist.

$$\lim_{K\to\infty} \| F''(z) - F''(x_K)\| = 0$$

da F'' stetig ist.

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\| x_K - z - [F'(x_K)]^{-1} F(x_K)\|}{\| x_K - z\|} = 0$$

wie zu Anfang des Beweises bereits gezeigt wurde.

$$\frac{\| F(x_K) - F(z)\|}{\| x_K - z\|}$$ bleibt beschränkt für $k \to \infty$.

da F im Punkte z differenzierbar ist.

Daraus folgt dann die Behauptung. ■

Die Voraussetzungen von Satz II.11 sind insbesondere erfüllt, wenn die Voraussetzungen von Satz II.7 bzw. Satz II.9 erfüllt sind. Die gleichmäßige Beschränktheit der Inversen folgt hierbei aus $\mu_0 < \frac{1}{2}$ wie bereits im Zusammenhang mit dem Newton-Verfahren (S. 15 unten / 16 oben) ausgeführt wurde.

Die guten Ergebnisse, die die Beweistechnische Ausnutzung der Verwandtschaft von Newton- und Tschebyscheff-Verfahren geliefert hat, legt es nahe, auch die Verwandtschaft zwischen dem gemischten Newton-Verfahren und dem Tschebyscheff-Verfahren auszuwerten. Die Iterationsvorschrift des gemischten Newton-Verfahrens (s. S. 20) lautet nämlich:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n)) \\ &\approx x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - [F'(x_n)]^{-1} \{ F(x_n) - \\ &\quad - F'(x_n)[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) + \tfrac{1}{2} F''(x_n)[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)} \} \\ &= x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{2} [F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)} \end{aligned}$$

Die abgebrochene Taylorentwicklung zeigt hier die noch größere Ähnlichkeit der beiden Iterationsvorschriften. Zur Abschätzung ihrer Differenz benötigt man in diesem Falle allerdings die dritte Ableitung von F, so daß der auf dieser Verwandtschaft basierende Satz II.14 vom Typ her den aus der Literatur her bekannten Sätzen zum Tschebyscheff-Verfahren ähnelt, wobei lediglich der Konvergenzbereich vergrößert wird.
Auch für diesen Satz sind zunächst einige Vorbetrachtungen notwendig.

Satz II.12: Sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen und $S \subset M$ konvex. Sei $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist mit

$$\sup_{x \in S} \| F''(x) \| \leq K_2$$

Weiter seien:

$$N(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x)$$

$$c(x) := - [F'(x)]^{-1} F(x)$$

$$\gamma(x) := \| [F'(x)]^{-1} F(x) \|$$

$$\beta(x) := \| [F'(x)]^{-1} \|$$

$$\mathcal{S}(x) := \| [F'(x)]^{-1} \| \, \| F(x) \|$$

$$G(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x) - [F'(x)]^{-1} F(x + c(x))$$

Es seien nun x, $x + \Delta x$, $x + c(x)$, $x + \Delta x + c(x + \Delta x) \in S$ und $[F'(x)]^{-1}$ existiere, sei linear und beschränkt, und es gelte:

$$\| [F'(x)]^{-1} \| K_2 \| \Delta x \| < 1 \quad \text{d.h.} \quad \beta(x) K_2 \| \Delta x \| < 1$$

Dann gilt:

$$\| G(x + \Delta x) - G(x) \| \leq \frac{\beta(x) K_2 \| \Delta x \| \left(\mathcal{S}(x) + \frac{1}{2} \| \Delta x \| \right)}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|} *$$

$$* \left\{ 2 + \beta(x) K_2 \mathcal{S}(x) + \frac{\beta(x) K_2 \| \Delta x \| \left(\frac{1}{2} \beta(x) K_2 \mathcal{S}(x) + \frac{1}{4} \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \right)}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|} \right\} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \left\{ \beta(x) K_2 \mathcal{S}(x) + \left(1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \right) \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \right\}}{\left[1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \right]^3} *$$

$$* \left\{ \mathcal{S}(x) + \left(1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \right) \| \Delta x \| \right\}$$

Beweis:

(2.74) Es ist:

$$\| [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) - [F'(x)]^{-1} F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) \| =$$

$$= \| [F'(x)]^{-1} \{ F(x + c(x)) + F'(x + c(x)) [x + \Delta x + c(x + \Delta x) -$$

$$- [x + c(x)]] - F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) - F'(x + c(x)) [x + \Delta x +$$

$$+ c(x + \Delta x) - [x + c(x)]] \} \|$$

$$\leq \| [F'(x)]^{-1} \| \frac{1}{2} K_2 \| x + \Delta x + c(x + \Delta x) - [x + c(x)] \|^2 +$$

$$+ \| [F'(x)]^{-1} F'(x + c(x)) [x + \Delta x + c(x + \Delta x) - [x + c(x)]] \|$$

$$\leq \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| N(x + \Delta x) - N(x) \|^2 + \| [F'(x)]^{-1} \{ F'(x + c(x)) - F'(x) \} +$$

$$+ I \| \| N(x + \Delta x) - N(x) \|$$

$$\leq \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| N(x + \Delta x) - N(x) \|^2 + \left[\beta(x) K_2 \mathcal{S}(x) + 1 \right] \| N(x + \Delta x) -$$

$$- N(x) \|$$

(2.75) Es ist unter Verwendung von Satz II.4:

$$\| [F'(x)]^{-1} F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) - [F'(x + \Delta x)]^{-1} *$$

$$* F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) \| =$$

$$= \| \{ [F'(x)]^{-1} F'(x + \Delta x) - I \} [F'(x + \Delta x)]^{-1} F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) \|$$

$$\leq \| [F'(x)]^{-1} \{ F'(x + \Delta x) - F'(x) \} \| \| [F'(x + \Delta x)]^{-1} \cdot$$
$$\cdot F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) \|$$

$$\leq \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \frac{1}{2} \beta(x + \Delta x) K_2 \mathcal{S}^2(x + \Delta x)$$

$$\leq \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \frac{1}{2} \frac{\beta(x)}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|} K_2 \cdot$$
$$\left\{ \frac{\mathcal{S}(x) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \|) \| \Delta x \|}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|} \right\}^2$$

Denn mit $y := x + \Delta x$ gilt:

$$\| F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) \| \leq$$
$$\leq \| F(y + c(y)) - F(y) - F'(y) c(y) \| + \| F(y) + F'(y) c(y) \|$$
$$\leq \frac{1}{2} K_2 \| c(y) \|^2 + \| F(y) - F'(y) [F'(y)]^{-1} F(y) \|$$
$$\leq \frac{1}{2} K_2 \mathcal{S}^2(y)$$

(2.76) Wegen (2.74) und (2.75) hat man:

$$\| G(x + \Delta x) - G(x) \| =$$
$$= \| x + \Delta x - [F'(x + \Delta x)]^{-1} F(x + \Delta x) - [F'(x + \Delta x)]^{-1} \cdot$$
$$F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) - x + [F'(x)]^{-1} F(x) + [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) \|$$
$$\leq \| N(x + \Delta x) - N(x) \| + \| [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) - [F'(x + \Delta x)]^{-1} \cdot$$
$$F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) \|$$
$$\leq \| N(x + \Delta x) - N(x) \| + \| [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) - [F'(x)]^{-1} \cdot$$
$$F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) \| + \| [F'(x)]^{-1} F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) -$$
$$- [F'(x + \Delta x)]^{-1} F(x + \Delta x + c(x + \Delta x)) \|$$
$$\leq \| N(x + \Delta x) - N(x) \| + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| N(x + \Delta x) - N(x) \|^2 +$$
$$+ [\beta(x) K_2 \mathcal{S}(x) + 1] \| N(x + \Delta x) - N(x) \| + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \cdot$$
$$\cdot \frac{\beta(x) K_2}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|} \left\{ \frac{\mathcal{S}(x) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \|) \| \Delta x \|}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|} \right\}^2$$
$$= \| N(x + \Delta x) - N(x) \| \{ 2 + \beta(x) K_2 \mathcal{S}(x) + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \cdot$$
$$\| N(x + \Delta x) - N(x) \| \} + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \| \frac{\beta(x) K_2}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|} \cdot$$
$$\cdot \left\{ \frac{\mathcal{S}(x) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \|) \| \Delta x \|}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|} \right\}^2$$

Mit der Beziehung (2.33) aus Satz II.4, d.h. mit

$$\| N(x + \Delta x) - N(x) \| \leq \frac{\beta(x) K_2 \| \Delta x \| (\mathcal{S}(x) + \frac{1}{2} \| \Delta x \|)}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|}$$

folgt hieraus die Behauptung. ∎

Satz II.13: Sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen und $S \subset M$ konvex. Sei $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist mit

$$\sup_{x \in S} \| F''(x) \| \leq K_2 \quad \text{und} \quad \sup_{x \in S} \| F'''(x) \| \leq K_3$$

Weiterhin seien:

$$T(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x) - \frac{1}{2} [F'(x)]^{-1} F''(x) [[F'(x)]^{-1} F(x)]^{(2)}$$

$$c(x) := - [F'(x)]^{-1} F(x)$$

$$\gamma(x) := \| [F'(x)]^{-1} F(x) \|$$

$$\beta(x) := \| [F'(x)]^{-1} \|$$

$$\delta(x) := \| [F'(x)]^{-1} \| \, \| F(x) \|$$

$$G(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x) - [F'(x)]^{-1} F(x + c(x))$$

Es seien nun x, $x + \Delta x$, $x + c(x)$, $x + \Delta x + c(x + \Delta x) \in S$ und $[F'(x)]^{-1}$ existiere, sei linear und beschränkt und es gelte

$$\beta(x) K_2 \| \Delta x \| < 1$$

Dann gilt:

$$\| T(x + \Delta x) - G(x + \Delta x) \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{6} \frac{1}{(1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|)^2} \left\{ \beta(x) K_3 \delta^2(x) + 2 (1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \|) * \right.$$

$$\left. \beta(x) K_3 \| \Delta x \| \delta(x) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \|)^2 \beta(x) K_3 \| \Delta x \|^2 \right\} *$$

$$* \frac{\delta(x) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \|) \| \Delta x \|}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|}$$

Beweis: Es ist:

$$\| T(x) - G(x) \| =$$

$$= \| x - [F'(x)]^{-1} F(x) - \frac{1}{2} [F'(x)]^{-1} F''(x) [[F'(x)]^{-1} F(x)]^{(2)} - x +$$

$$+ [F'(x)]^{-1} F(x) + [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) \|$$

$$= \| \frac{1}{2} [F'(x)]^{-1} F''(x) \, c(x)^{(2)} - [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) \|$$

$$= \| \frac{1}{2} [F'(x)]^{-1} F''(x) \, c(x)^{(2)} - [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) - [F'(x)]^{-1} F'(x) *$$

$$c(x) - [F'(x)]^{-1} F(x) + [F'(x)]^{-1} F'(x) \, c(x) + [F'(x)]^{-1} F(x) \|$$

$$= \| [F'(x)]^{-1} (F(x) + F'(x) \, c(x) + \frac{1}{2} F''(x) \, c(x)^{(2)} - F(x + c(x))) -$$

$$- c(x) + c(x) \|$$

$$\leq \| [F'(x)]^{-1} \| \, \frac{1}{6} \, K_3 \, \| c(x) \|^3$$

$$\leq \frac{1}{6} \beta(x) K_3 \gamma^3(x)$$

Indem man x durch $x + \Delta x$ ersetzt und Satz II.4 beachtet, erhält man die Behauptung:

$$\| T(x + \Delta x) - G(x + \Delta x) \| \leq \frac{1}{6} \beta(x + \Delta x) K_3 \gamma^3(x + \Delta x)$$

$$\beta(x + \Delta x) \leq \frac{\beta(x)}{1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|}$$

$$\gamma(x+\Delta x) \leq \frac{\mathcal{S}(x) + (1+\frac{1}{2}\beta(x)K_2\|\Delta x\|)\|\Delta x\|}{1-\beta(x)K_2\|\Delta x\|}$$

Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Mit Hilfe dieser Vorbetrachtungen kann nun ein weiterer Satz über das Tschebyscheff-Verfahren bewiesen werden.

Satz II.14: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \mathcal{S}_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \|x - x_0\| \leq 2\mathcal{S}_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F'''(x)\| \leq K_3$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \mathcal{S}_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\chi_0 := \beta_0 K_3 \mathcal{S}_0^2$$

Überdies gelte: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch

(2.77) μ_0, χ_0 sowie $\nu_0 := 0$, $\lambda_0 := 0$, $\xi_0 := 0$, $\varepsilon_0 := 0$, $\pi_0 := 1$

und

$$(2.78)\quad \varphi_n := \frac{\frac{1}{6}\{\chi_n + 2(1+\frac{1}{2}\nu_n)\xi_n + (1+\frac{1}{2}\nu_n)^2\lambda_n\}}{(1-\nu_n)^3} +$$

$$+ \frac{\nu_n}{1-\nu_n}\left\{2 + \mu_n + \frac{\nu_n[\frac{1}{2}\mu_n + \frac{1}{4}\nu_n]}{1-\nu_n}\right\} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\nu_n\{\mu_n + (1+\frac{1}{2}\nu_n)\nu_n\}}{(1-\nu_n)^3}$$

$$(2.79)\quad \psi_n := \frac{\frac{1}{6}\{\chi_n + 2(1+\frac{1}{2}\nu_n)\xi_n + (1+\frac{1}{2}\nu_n)^2\lambda_n\}}{(1-\nu_n)^3} \cdot$$

$$\cdot (1+\tfrac{1}{2}\nu_n) + \frac{\frac{1}{2}\nu_n}{1-\nu_n}\left\{2 + \mu_n + \frac{\nu_n[\frac{1}{2}\mu_n + \frac{1}{4}\nu_n]}{1-\nu_n}\right\} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\nu_n\{\mu_n + (1+\frac{1}{2}\nu_n)\nu_n\}(1+\frac{1}{2}\nu_n)}{(1-\nu_n)^3}$$

$$(2.80)\quad \mu_{n+1} := \frac{\frac{1}{8}\mu_n^4 + \frac{1}{2}\mu_n^3}{[1-\mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2]^2}$$

$$(2.81)\quad \nu_{n+1} := \frac{\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}$$

$$(2.82)\quad \pi_{n+1} := \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}$$

$$(2.83)\quad \varepsilon_{n+1} := \varphi_n \pi_n + \psi_n \varepsilon_n$$

$$(2.84)\quad \chi_{n+1} := \frac{\left[\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2\right]^2}{\left[1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2\right]^3}\,\chi_n$$

$$(2.85)\quad \xi_{n+1} := \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{\left[1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2\right]^2}\left\{\varphi_n \chi_n + \psi_n \xi_n\right\}$$

$$(2.86)\quad \alpha_{n+1} := \frac{1}{\left[1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2\right]^2}\left\{\varphi_n^2 \chi_n + 2\varphi_n \psi_n \xi_n + \psi_n^2 \alpha_n\right\}$$

rekursiv definierten Zahlen μ_n, χ_n, ν_n, α_n, ξ_n, ε_n, π_n, φ_n, ψ_n für $n \le N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

$$(2.87)\quad \nu_n < 1 \qquad \forall\ n \le N$$

$$(2.88)\quad \varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1}(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k)\pi_k \le 2 \qquad \forall\ 1 \le n \le N$$

$$(2.89)\quad \nu_{N+1} \le \nu_N$$

$$(2.90)\quad \varepsilon_{N+1} \le \varepsilon_N$$

$$(2.91)\quad \xi_{N+1} \le \xi_N$$

$$(2.92)\quad \alpha_{N+1} \le \alpha_N$$

$$(2.93)\quad \psi_N < 1$$

$$(2.94)\quad \varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N}(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k)\pi_k + \left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{8}\mu_N^4 + \frac{1}{2}\mu_N^3}{\left[1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2\right]^2}\right\} * \frac{\frac{1}{8}\mu_N^3 + \frac{1}{2}\mu_N^2}{1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2}\,\pi_N \le 2$$

Dann gilt:

(2.95) Die durch $y_0 := x_0$ und $y_{n+1} := y_n - [F'(y_n)]^{-1}F(y_n) - \frac{1}{2}[F'(y_n)]^{-1} \cdot F''(y_n)[[F'(y_n)]^{-1}F(y_n)]^{(2)}$ rekursiv definierte Folge $\{y_n\}$ existiert, es gilt $y_n \in S_0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x^*$.

(2.96) Es gilt $F(x^*) = 0$.

(2.97) Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Zusätzlich zu den durch (2.77) - (2.86) definierten Folgen werden noch die durch

(2.98) δ_0, β_0 sowie $\tilde{\delta}_0 := 0$

und

$$(2.99)\qquad \beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}$$

$$(2.100)\qquad \xi_{n+1} := \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}\,\xi_n$$

$$(2.101)\qquad \hat{\delta}_{n+1} := \varphi_n \xi_n + \psi_n \hat{\delta}_n$$

rekursiv definierten Folgen $\{\beta_n\}, \{\xi_n\}, \{\hat{\delta}_n\}$ eingeführt.

Es wird nun zunächst gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (2.77) - (2.86) und (2.98) - (2.101) definierten Zahlen φ_n, ψ_n, μ_n, ν_n, π_n, ε_n, χ_n, ξ_n, λ_n, β_n, ξ_n, $\hat{\delta}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, sowie

$$(2.102)\qquad \mu_n \geq 0\ ,\ \mu_{n+1} \leq \mu_n\ ,\ \mu_n = \beta_n K_2 \xi_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(2.103)\qquad \nu_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ \nu_{n+1} \leq \nu_n \ \forall\, n \geq N$$

$$(2.104)\qquad \pi_n \geq 0\ ,\ \pi_{n+1} \leq \tfrac{3}{8}\pi_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(2.105)\qquad \varepsilon_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n \ \forall\, n \geq N$$

$$(2.106)\qquad \chi_n \geq 0\ ,\ \chi_{n+1} \leq \tfrac{3}{8}\chi_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(2.107)\qquad \xi_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ \xi_{n+1} \leq \xi_n \ \forall\, n \geq N$$

$$(2.108)\qquad \lambda_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ \lambda_{n+1} \leq \lambda_n \ \forall\, n \geq N$$

$$(2.109)\qquad \beta_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(2.110)\qquad \xi_n \geq 0\ ,\ \xi_{n+1} \leq \tfrac{3}{8}\xi_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(2.111)\qquad \hat{\delta}_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(2.112)\qquad \varphi_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(2.113)\qquad \psi_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Denn: Da die Voraussetzungen des Satzes über das gemischte Newton-Verfahren (Satz I.7) erfüllt sind, erhält man aus Teil (A) des dortigen Beweises die Existenz von $\{\mu_n\}, \{\beta_n\}, \{\xi_n\}$ sowie die Aussagen (2.102), (2.109) und (2.110).
Aus (2.82) und (2.102) folgt (2.104). Aus (2.84) und (2.102) folgt (2.106). Die Aussagen (2.103), (2.105), (2.107), (2.108), (2.112) und (2.113) erhält man aus (2.80), (2.81), (2.85), (2.86) sowie (2.87), wenn man unter Beachtung von (2.89), (2.90), (2.91) und (2.92) sowie (2.106) berücksichtigt, daß die durch (2.78) und (2.79) definierten Ausdrücke

$$\varphi_n := \varphi_n(\mu_n, \nu_n, \chi_n, \xi_n, \lambda_n)$$
$$\psi_n := \psi_n(\mu_n, \nu_n, \chi_n, \xi_n, \lambda_n)$$

für $0 \leq \nu_n < 1$ sowie $\mu_n, \chi_n, \xi_n, \lambda_n \geq 0$ positiv oder Null sind und unter diesen Bedingungen in $\mu_n, \nu_n, \chi_n, \xi_n, \lambda_n$ monoton fallen,

d.h. aus $\quad 0 \leq \nu_n < 1\ ;\ 0 \leq \nu_{n+1} < 1$

$$\mu_n, \chi_n, \xi_n, \lambda_n \geq 0\ ;\ \mu_{n+1}, \chi_{n+1}, \xi_{n+1}, \lambda_{n+1} \geq 0$$

und $\quad \mu_{n+1} \leq \mu_n\ ,\ \chi_{n+1} \leq \chi_n\ ,\ \xi_{n+1} \leq \xi_n\ ,\ \lambda_{n+1} \leq \lambda_n$

$$\nu_{n+1} \leq \nu_n$$

folgt $\quad \varphi_{n+1} \leq \varphi_n\ ,\ \psi_{n+1} \leq \psi_n$

(2.111) ergibt sich dann unmittelbar aus (2.101). Aus (2.102), (2.103)

und (2.106) - (2.108) sowie (2.93) erhält man schließlich noch

$$(2.114) \qquad \psi_n \le \psi_N < 1 \qquad \forall \quad n \ge N$$

$$(2.115) \qquad \varphi_n \le \varphi_N \qquad \forall \quad n \ge N$$

Für den weiteren Beweis werden nun folgende Bezeichnungen verwendet:

$$T(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x) - \frac{1}{2} [F'(x)]^{-1} F''(x)[[F'(x)]^{-1} F(x)]^{(2)}$$

$$c(x) := - [F'(x)]^{-1} F(x)$$

$$G(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x) - [F'(x)]^{-1} F(x + c(x))$$

$$\beta(x) := \| [F'(x)]^{-1} \|$$

$$\delta(x) := \| [F'(x)]^{-1} F(x) \|$$

Der Satz über das gemischte Newton-Verfahren (Satz I.7) liefert nun die Aussagen:

(2.116) Die durch x_0 und $x_{n+1} := G(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $x_n \in S_0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Außerdem existiert ein $x^* \in S_0$ mit $x_n \to x^*$ und $F(x^*) = \theta$, wobei x^* die einzige Lösung der Gleichung $F(x) = \theta$ in S_0 ist.

Weiter entnimmt man Teil (B) des Beweises von Satz I.7 die Abschätzungen:

$$(2.117) \quad \begin{cases} \beta(x_n) \le \beta_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \delta(x_n) \le \delta_n & \forall\, n \ge 1 \\ \beta_n K_2 \delta_n = \mu_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \| x_{n+1} - x_n \| \le (1 + \frac{1}{2} \mu_n) \delta_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die durch das Tschebyscheff-Verfahren erzeugte Iterationsfolge (deren Existenz noch gezeigt werden muß!!) werde mit $\{y_n\}$ bezeichnet. D.h. $y_0 := x_0$, $y_{n+1} := T(y_n)$. Weiter sei $\Delta x_n := y_n - x_n$; d.h. $\Delta x_0 = \theta$, da $y_0 := x_0$. Es wird nun gezeigt: Die Folge $\{y_n\}$ existiert und es gilt $y_n \in S_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Hierfür genügt es durch vollständige Induktion nach n zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$(\text{Ind } 1)_n$ $\| \Delta x_n \| \le \bar{\delta}_n$

$(\text{Ind } 2)_n$ $\bar{\delta}_n \le \varepsilon_n \delta_0$, $\qquad \delta_n \le \pi_n \delta_0$

$(\text{Ind } 3)_n$ $y_n \in S_0$

$(\text{Ind } 4)_n$ $\beta_n K_2 \bar{\delta}_n = \nu_n < 1$; $\beta_n K_3 \delta_n^2 = \chi_n$; $\beta_n K_3 \delta_n \bar{\delta}_n = \xi_n$

$\beta_n K_3 \bar{\delta}_n^2 = \lambda_n$

$(\text{Ind } 5)_n$ $[F'(y_n)]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit:

$$\| [F'(y_n)]^{-1} \| \le \frac{\beta_n}{1 - \beta_n K_2 \bar{\delta}_n} = \frac{\beta_n}{1 - \nu_n}$$

Die Induktionsverankerung ergibt sich unmittelbar aus den Voraussetzungen und Definitionen. Schluß von n auf n+1:
Wegen $(\text{Ind } 3)_n$, $(\text{Ind } 5)_n$ existiert $y_{n+1} := T(y_n)$. Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_n$, $(\text{Ind } 4)_n$ sowie (2.117) und unter Heranziehung von Satz II.12 und Satz II.13 erhält man:

$$\| \Delta x_{n+1} \| = \| y_{n+1} - x_{n+1} \| = \| T(y_n) - G(x_n) \|$$

$$\le \| T(x_n + \Delta x_n) - G(x_n + \Delta x_n) \| + \| G(x_n + \Delta x_n) - G(x_n) \|$$

$$\leq \frac{1}{6}\left\{ \frac{\beta(x_n) K_3 \mathcal{S}^2(x_n) + 2\left(1 + \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)\beta(x_n) K_3 \|\Delta x_n\| \mathcal{S}(x_n)}{\left(1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)^2 \beta(x_n) K_3 \|\Delta x_n\|^2}{\left(1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)^2} \right\} *$$

$$* \frac{\mathcal{S}(x_n) + \left(1 + \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)\|\Delta x_n\|}{1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|} +$$

$$+ \frac{\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\left(\mathcal{S}(x_n) + \frac{1}{2}\|\Delta x_n\|\right)}{1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|} * \left\{ 2 + \beta(x_n) K_2 \mathcal{S}(x_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\left(\frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \mathcal{S}(x_n) + \frac{1}{4}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)}{1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|} \right\} +$$

$$+ \frac{\beta(x_n) K_2 \mathcal{S}(x_n) + \left(1 + \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|}{\left(1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)} *$$

$$* \left\{ \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\| \right\} * \left\{ \mathcal{S}(x_n) + \left(1 + \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)\|\Delta x_n\| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{6}\left\{ \frac{\chi_n + 2\left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)\varepsilon_n + \left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)^2 \lambda_n}{\left(1 - \nu_n\right)^2} \right\} *$$

$$\frac{\mathcal{S}_n + \left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)\hat{\delta}_n}{1 - \nu_n} + \frac{\nu_n\left(\varepsilon_n + \frac{1}{2}\hat{\delta}_n\right)}{1 - \nu_n} * \left\{ 2 + \mu_n + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu_n\left(\frac{1}{2}\mu_n + \frac{1}{4}\nu_n\right)}{1 - \nu_n} \right\} + \frac{\frac{1}{2}\nu_n\left\{\mu_n + \left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n\right\}}{\left(1 - \nu_n\right)^3} *$$

$$* \left\{ \mathcal{S}_n + \left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)\hat{\delta}_n \right\}$$

$$= \hat{\delta}_{n+1} \qquad \text{wegen (2.78), (2.79)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 1)_{n+1}$.
Aus $(\text{Ind } 2)_n$ folgt

$$\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \mathcal{S}_n + \psi_n \hat{\delta}_n \leq \left(\varphi_n \pi_n + \psi_n \varepsilon_n\right)\mathcal{S}_0 = \varepsilon_{n+1}\mathcal{S}_0 \qquad \text{wegen (2.83)}$$

$$\mathcal{S}_{n+1} = \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}\mathcal{S}_n = \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}\pi_n \mathcal{S}_0 = \pi_{n+1}\mathcal{S}_0$$

wegen (2.82). Hieraus folgt $(\text{Ind } 2)_{n+1}$. Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ und $(\text{Ind } 2)_{n+1}$ sowie unter Berücksichtigung von (2.80), (2.102) und (2.117) erhält man:

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - x_0\| &\leq \|y_{n+1} - x_{n+1}\| + \sum_{k=0}^{n}\|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq \hat{\delta}_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2}\mu_k\right)\mathcal{S}_k \\ &\leq \left(\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2}\mu_k\right)\pi_k\right)\mathcal{S}_0 \end{aligned}$$

Für $n+1 \le N$ folgt hieraus nach (2.88):

$$\| y_{n+1} - x_0 \| \le 2\,\varepsilon_0 \qquad \Rightarrow \qquad y_{n+1} \in S_0$$

Ist $n+1 > N$, so hat man:

$$\begin{aligned}
\| y_{n+1} - x_0 \| &\le \Big(\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k \Big)\,\varepsilon_0 \\
&\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k \Big)\,\varepsilon_0 \\
&\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k \Big)\,\varepsilon_0 \\
&\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k + \left(1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{8}\mu_N^4 + \frac{1}{2}\mu_N^3}{\big(1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2\big)^2}\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} \pi_k \Big)\,\varepsilon_0 \\
&\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k + \left(1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{8}\mu_N^4 + \frac{1}{2}\mu_N^3}{\big(1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2\big)^2}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\frac{1}{8}\mu_N^3 + \frac{1}{2}\mu_N^2}{1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2}\,\pi_N \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{8}\mu_N^3 + \frac{1}{2}\mu_N^2}{1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2} \right)^k \Big)\,\varepsilon_0 \\
&= \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k + \left(1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{8}\mu_N^4 + \frac{1}{2}\mu_N^3}{\big(1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2\big)^2}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\frac{1}{8}\mu_N^3 + \frac{1}{2}\mu_N^2}{1 - \mu_N - \mu_N^2 - \frac{1}{8}\mu_N^3}\,\pi_N \Big)\,\varepsilon_0 \\
&\le 2\,\varepsilon_0 \qquad \text{nach (2.94)}
\end{aligned}$$

Also gilt auch in diesem Falle $y_{n+1} \in S_0$. Hieraus folgt $(\text{Ind } 3)_{n+1}$. Mit (2.81), (2.84), (2.85), (2.86) sowie (2.99), (2.100), (2.101) und $(\text{Ind } 4)_n$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1} K_2 \hat{\delta}_{n+1} &= \frac{\beta_n K_2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \big(\varphi_n \varepsilon_n + \psi_n \hat{\delta}_n \big) \\
&= \frac{1}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \big(\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n \big) \\
&= \nu_{n+1} \\
\beta_{n+1} K_3 \varepsilon_{n+1}^2 &= \frac{\beta_n K_3}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \left\{ \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \right\}^2 \varepsilon_n^2 \\
&= \frac{\big(\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2\big)^2}{\big(1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2\big)^3}\,\chi_n \\
&= \chi_{n+1} \\
\beta_{n+1} K_3 \varepsilon_{n+1} \hat{\delta}_{n+1} &= \frac{\beta_n K_3}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \left\{ \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \right\} \big(\varphi_n \varepsilon_n + \psi_n \hat{\delta}_n \big)\,\varepsilon_n
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{(1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2)^2} \quad (\varphi_n \chi_n + \psi_n \tilde{\xi}_n)$$

$$= \tilde{\xi}_{n+1}$$

$$\beta_{n+1} K_3 \hat{\delta}_{n+1}^2 = \frac{\beta_n K_3}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \quad (\varphi_n \xi_n + \psi_n \hat{\delta}_n)^2$$

$$= \frac{\beta_n K_3}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \quad (\varphi_n^2 \xi_n^2 + 2\varphi_n \psi_n \xi_n \hat{\delta}_n + \psi_n^2 \hat{\delta}_n^2)$$

$$= \frac{1}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \quad (\varphi_n^2 \chi_n + 2\varphi_n \psi_n \tilde{\xi}_n + \psi_n^2 \alpha_n)$$

$$= \alpha_{n+1}$$

Hieraus folgt mit (2.87) und (2.103) dann $(\text{Ind } 4)_{n+1}$. Unter Beachtung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$, $(\text{Ind } 4)_{n+1}$ und $[F'(y_{n+1})]^{-1} = [F'(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})]^{-1}$ erhält man unter Heranziehung von Satz II.4, (2.31), (2.32) dann noch $(\text{Ind } 5)_{n+1}$. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Nun ist für $n \geq N$ nach (2.114), (2.115):

$$\psi_n \leq \psi_N < 1 \quad \text{und} \quad \varphi_n \leq \varphi_N \text{ , d.h.}$$

$$\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \xi_n + \psi_n \hat{\delta}_n$$

$$\leq \varphi_N \xi_n + \psi_N \hat{\delta}_n$$

Wegen $\psi_N < 1$ erhält man aus Satz II.5

$$\lim_{n \to \infty} \hat{\delta}_n = 0 \quad \text{d.h.} \quad \| y_n - x_n \| \to 0$$

d.h. da $x_n \to x^*$ nach (2.116) gilt, gilt auch $y_n \to x^*$. Zusammen mit (2.116) folgen hieraus die Behauptungen.
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bevor die etwas unübersichtlichen Voraussetzungen dieses Satzes II.14 in Satz II.16 durch einfache Zahlenkombinationen ausgedrückt werden, soll noch eine Fehlerschranke für das Tschebyscheff-Verfahren angegeben werden, deren Konstruktion sich unmittelbar aus dem obigen Beweis von Satz II.14 ergibt.

Satz II.15: Es seien die Voraussetzungen von Satz II.14 erfüllt. Dann gilt:

$$(2.118) \quad \| x^* - y_{n+1} \| \leq \left\{ \frac{1}{6} K_3 \tilde{\beta}_n + \frac{1}{2} K_2^2 \tilde{\beta}_n^2 + \frac{1}{8} K_2^3 \tilde{\beta}_n^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\tilde{\xi}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\tilde{\beta}_n K_2 \tilde{\xi}_n}} \right\} \cdot \left\{ \frac{2\tilde{\xi}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\tilde{\beta}_n K_2 \tilde{\xi}_n}} \right\}^3$$

Dabei seien β_n, ξ_n, ν_n, $\hat{\delta}_n$ wie in Satz II.14 rekursiv definiert und

$$(2.119) \quad \tilde{\beta}_n := \frac{\beta_n}{1 - \nu_n} \quad ; \quad \tilde{\xi}_n := \frac{\xi_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\hat{\delta}_n}{1 - \nu_n}$$

In dieser Form ist dann (2.118) eine a-priori-Fehlerabschätzung.

Setzt man hingegen

(2.120) $\widetilde{\beta}_n := \|[F'(y_n)]^{-1}\| \quad ; \quad \widetilde{\mathcal{S}}_n := \|[F'(y_n)]^{-1} F(y_n)\|$

so erhält man eine a-posteriori-Fehlerabschätzung.

Beweis: Satz II.3 entnimmt man die Beziehung (2.30):

$$\|x^* - y_{n+1}\| \le \left\{ \frac{1}{6} K_3 \|[F'(y_n)]^{-1}\| + \frac{1}{2} K_2^2 \|[F'(y_n)]^{-1}\|^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8} K_2^3 \|[F'(y_n)]^{-1}\|^3 \|x^* - y_n\| \right\} \|x^* - y_n\|$$

Wählt man zunächst die Darstellung (2.120) für $\widetilde{\beta}_n$, $\widetilde{\mathcal{S}}_n$, so liefert die Beziehung (1.12) des Beweises von Satz I.4:

$$\|x^* - y_n\| \le \frac{2\,\widetilde{\mathcal{S}}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\,\widetilde{\beta}_n K_2\,\widetilde{\mathcal{S}}_n}}$$

Hieraus folgt dann unmittelbar (2.118). Die Darstellung (2.119) ist nun aber eine Abschätzung für die $\widetilde{\beta}_n$, $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ der Darstellung (2.120), die man sofort aus dem Beweis von Satz II.14 erhält. Damit ist (2.118) auch für die Darstellung (2.119) bewiesen. ■

Im folgenden Satz werden die Voraussetzungen von Satz II.14 in Form einfacher Bedingungen "abgeschätzt".

Satz II.16: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \le \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \le \mathcal{S}_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \|x - x_0\| \le 2\,\mathcal{S}_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \le K_2$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F'''(x)\| \le K_3$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \mathcal{S}_0$$

$$\chi_0 := \beta_0 K_3 \mathcal{S}_0^2$$

Haben μ_0 und χ_0 höchstens die Größe der in Tabelle II/2 angegebenen Wertekombinationen, so gilt:

(2.121) Die durch x_0 und
$x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \frac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)\{[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\}^{(2)}$
rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$.

(2.122) Es gilt $F(x^*) = 0$.

(2.123) Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Es sind für die in Tabelle II/2 angegebenen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 die Voraussetzungen von Satz II.14 zu überprüfen. Dies geschieht so, daß man von μ_0 und χ_0 ausgehend rekursiv die durch (2.77) - (2.86) definierten Größen für $n = 0,1,2,\ldots$ berechnet und nach jedem Schritt die Bedingungen (2.87) - (2.94) überprüft. Sind diese Bedingungen dann für ein $n = N$ erfüllt, so folgt aus Satz II.14 die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens. Damit dieser "Entscheidungsalgorithmus" notwendig nach einer endlichen Anzahl von Rechenschritten beendet ist, kann man sich für N eine Höchstgrenze setzen,

(weiter auf Seite 67)

Tabelle II/2 (zu Satz II.14 bzw. Satz II.16)

μ_0	χ_0	μ_0	χ_0
0.000	6.00000	.050	5.30668
.001	5.99502	.051	5.28760
.002	5.97009	.052	5.27455
.003	5.95520	.053	5.26153
.004	5.94036	.054	5.24855
.005	5.92557	.055	5.23559
.006	5.91081	.056	5.22267
.007	5.89611	.057	5.20978
.008	5.88144	.058	5.19691
.009	5.86682	.059	5.18408
.010	5.85224	.060	5.17127
.011	5.83770	.061	5.15850
.012	5.82321	.062	5.14575
.013	5.80875	.063	5.13303
.014	5.79434	.064	5.12034
.015	5.77997	.065	5.10768
.016	5.76564	.066	5.09505
.017	5.75136	.067	5.08244
.018	5.73711	.068	5.06987
.019	5.72290	.069	5.05732
.020	5.70873	.070	5.04480
.021	5.69460	.071	5.03230
.022	5.68051	.072	5.01983
.023	5.66646	.073	5.00739
.024	5.65244	.074	4.99498
.025	5.63847	.075	4.98259
.026	5.62453	.076	4.97023
.027	5.61063	.077	4.95789
.028	5.59677	.078	4.94559
.029	5.58294	.079	4.93330
.030	5.56915	.080	4.92104
.031	5.55540	.081	4.90881
.032	5.54168	.082	4.89660
.033	5.52800	.083	4.88442
.034	5.51436	.084	4.87226
.035	5.50075	.085	4.86013
.036	5.48717	.086	4.84802
.037	5.47363	.087	4.83594
.038	5.46013	.088	4.82388
.039	5.44666	.089	4.81184
.040	5.43322	.090	4.79983
.041	5.41982	.091	4.78784
.042	5.40645	.092	4.77586
.043	5.39311	.093	4.76394
.044	5.37981	.094	4.75202
.045	5.36654	.095	4.74012
.046	5.35330	.096	4.72825
.047	5.34010	.097	4.71640
.048	5.32693	.098	4.70457
.049	5.31378	.099	4.69277

Tabelle II/2 (zu Satz II.14 bzw. Satz II.16)

μ_0	χ_0	μ_0	χ_0
.100	4.68098	.150	4.11696
.101	4.66922	.151	4.10612
.102	4.65748	.152	4.09530
.103	4.64577	.153	4.08449
.104	4.63407	.154	4.07370
.105	4.62240	.155	4.06292
.106	4.61074	.156	4.05216
.107	4.59911	.157	4.04141
.108	4.58750	.158	4.03068
.109	4.57591	.159	4.01996
.110	4.56434	.160	4.00925
.111	4.55279	.161	3.99856
.112	4.54126	.162	3.98789
.113	4.52976	.163	3.97723
.114	4.51827	.164	3.96658
.115	4.50680	.165	3.95594
.116	4.49535	.166	3.94532
.117	4.48392	.167	3.93472
.118	4.47251	.168	3.92412
.119	4.46112	.169	3.91354
.120	4.44975	.170	3.90297
.121	4.43840	.171	3.89242
.122	4.42707	.172	3.88188
.123	4.41576	.173	3.87135
.124	4.40446	.174	3.86083
.125	4.39319	.175	3.85033
.126	4.38193	.176	3.83984
.127	4.37069	.177	3.82936
.128	4.35947	.178	3.81890
.129	4.34827	.179	3.80844
.130	4.33708	.180	3.79800
.131	4.32592	.181	3.78757
.132	4.31477	.182	3.77715
.133	4.30363	.183	3.76675
.134	4.29252	.184	3.75635
.135	4.28142	.185	3.74597
.136	4.27034	.186	3.73560
.137	4.25928	.187	3.72524
.138	4.24823	.188	3.71489
.139	4.23720	.189	3.70455
.140	4.22619	.190	3.69423
.141	4.21520	.191	3.68391
.142	4.20422	.192	3.67361
.143	4.19325	.193	3.66331
.144	4.18231	.194	3.65303
.145	4.17137	.195	3.64276
.146	4.16046	.196	3.63249
.147	4.14956	.197	3.62224
.148	4.13868	.198	3.61200
.149	4.12781	.199	3.60177

Tabelle II/2 (zu Satz II.14 bzw. Satz II.16)

μ_0	χ_0	μ_0	χ_0
.200	3.59155	.250	3.09092
.201	3.58134	.251	3.08107
.202	3.57113	.252	3.07122
.203	3.56094	.253	3.06138
.204	3.55076	.254	3.05154
.205	3.54059	.255	3.04171
.206	3.53042	.256	3.03188
.207	3.52027	.257	3.02205
.208	3.51012	.258	3.01223
.209	3.49999	.259	3.00241
.210	3.48986	.260	2.99260
.211	3.47974	.261	2.98279
.212	3.46963	.262	2.97298
.213	3.45953	.263	2.96318
.214	3.44944	.264	2.95338
.215	3.43935	.265	2.94358
.216	3.42928	.266	2.93378
.217	3.41921	.267	2.92399
.218	3.40915	.268	2.91420
.219	3.39910	.269	2.90441
.220	3.38906	.270	2.89463
.221	3.37902	.271	2.88485
.222	3.36899	.272	2.87506
.223	3.35897	.273	2.86529
.224	3.34896	.274	2.85551
.225	3.33895	.275	2.84573
.226	3.32896	.276	2.83596
.227	3.31897	.277	2.82619
.228	3.30898	.278	2.81642
.229	3.29900	.279	2.80665
.230	3.28903	.280	2.79688
.231	3.27907	.281	2.78711
.232	3.26912	.282	2.77735
.233	3.25917	.283	2.76758
.234	3.24922	.284	2.75781
.235	3.23928	.285	2.74805
.236	3.22935	.286	2.73828
.237	3.21943	.287	2.72852
.238	3.20951	.288	2.71875
.239	3.19960	.289	2.70899
.240	3.18969	.290	2.69922
.241	3.17979	.291	2.68946
.242	3.16989	.292	2.67969
.243	3.16000	.293	2.66993
.244	3.15012	.294	2.66016
.245	3.14024	.295	2.65039
.246	3.13036	.296	2.64062
.247	3.12050	.297	2.63085
.248	3.11063	.298	2.62108
.249	3.10077	.299	2.61130

Tabelle II/2 (zu Satz II.14 bzw. Satz II.16)

μ_0	χ_0	μ_0	χ_0
.300	2.60153	.350	2.10667
.301	2.59175	.351	2.09656
.302	2.58197	.352	2.08645
.303	2.57219	.353	2.07632
.304	2.56240	.354	2.06617
.305	2.55262	.355	2.05602
.306	2.54283	.356	2.04585
.307	2.53303	.357	2.03566
.308	2.52324	.358	2.02546
.309	2.51344	.359	2.01525
.310	2.50364	.360	2.00503
.311	2.49383	.361	1.99479
.312	2.48402	.362	1.98454
.313	2.47421	.363	1.97426
.314	2.46439	.364	1.96397
.315	2.45457	.365	1.95367
.316	2.44475	.366	1.94335
.317	2.43491	.367	1.93302
.318	2.42508	.368	1.92267
.319	2.41524	.369	1.91230
.320	2.40539	.370	1.90191
.321	2.39554	.371	1.89151
.322	2.38569	.372	1.88109
.323	2.37583	.373	1.87064
.324	2.36596	.374	1.86018
.325	2.35609	.375	1.84970
.326	2.34621	.376	1.83921
.327	2.33632	.377	1.82869
.328	2.32643	.378	1.81815
.329	2.31653	.379	1.80759
.330	2.30662	.380	1.79701
.331	2.29671	.381	1.78641
.332	2.28679	.382	1.77578
.333	2.27686	.383	1.76513
.334	2.26692	.384	1.75447
.335	2.25697	.385	1.74377
.336	2.24702	.386	1.73306
.337	2.23706	.387	1.72232
.338	2.22709	.388	1.71156
.339	2.21711	.389	1.70077
.340	2.20712	.390	1.68995
.341	2.19712	.391	1.67911
.342	2.18711	.392	1.66825
.343	2.17710	.393	1.65736
.344	2.16707	.394	1.64644
.345	2.15703	.395	1.63549
.346	2.14698	.396	1.62452
.347	2.13692	.397	1.61352
.348	2.12685	.398	1.60249
.349	2.11677	.399	1.59143

Tabelle II/2 (zu Satz II.14 bzw. Satz II.16)

μ_0	χ_0	μ_0	χ_0
.400	1.53034	.450	.97384
.401	1.52622	.451	.96029
.402	1.52207	.452	.94667
.403	1.51638	.453	.93297
.404	1.51367	.454	.91918
.405	1.50942	.455	.90532
.406	1.50514	.456	.89136
.407	1.50083	.457	.87732
.408	1.49648	.458	.86319
.409	1.49210	.459	.84896
.410	1.48768	.460	.83464
.411	1.48323	.461	.82021
.412	1.47874	.462	.80568
.413	1.47422	.463	.79104
.414	1.46965	.464	.77629
.415	1.46505	.465	.76142
.416	1.46041	.466	.74643
.417	1.45573	.467	.73131
.418	1.45101	.468	.71606
.419	1.44625	.469	.70066
.420	1.44144	.470	.68513
.421	1.43659	.471	.66945
.422	1.43171	.472	.65358
.423	1.42677	.473	.63755
.424	1.42180	.474	.62134
.425	1.41677	.475	.60494
.426	1.41171	.476	.58834
.427	1.40659	.477	.57152
.428	1.40143	.478	.55446
.429	1.39622	.479	.53716
.430	1.39096	.480	.51959
.431	1.38565	.481	.50174
.432	1.38028	.482	.48357
.433	1.37487	.483	.46508
.434	1.36940	.484	.44623
.435	1.36388	.485	.42698
.436	1.35831	.486	.40732
.437	1.35268	.487	.38719
.438	1.34699	.488	.36656
.439	1.34124	.489	.34537
.440	1.33544	.490	.32358
.441	1.32957	.491	.30110
.442	1.32364	.492	.27785
.443	1.31765	.493	.25373
.444	1.31160	.494	.22855
.445	1.30548	.495	.20210
.446	1.29929	.496	.17397
.447	1.29304	.497	.14348
.448	1.28671	.498	.10930
.449	.98731	.499	.06858
		.500	0.00000

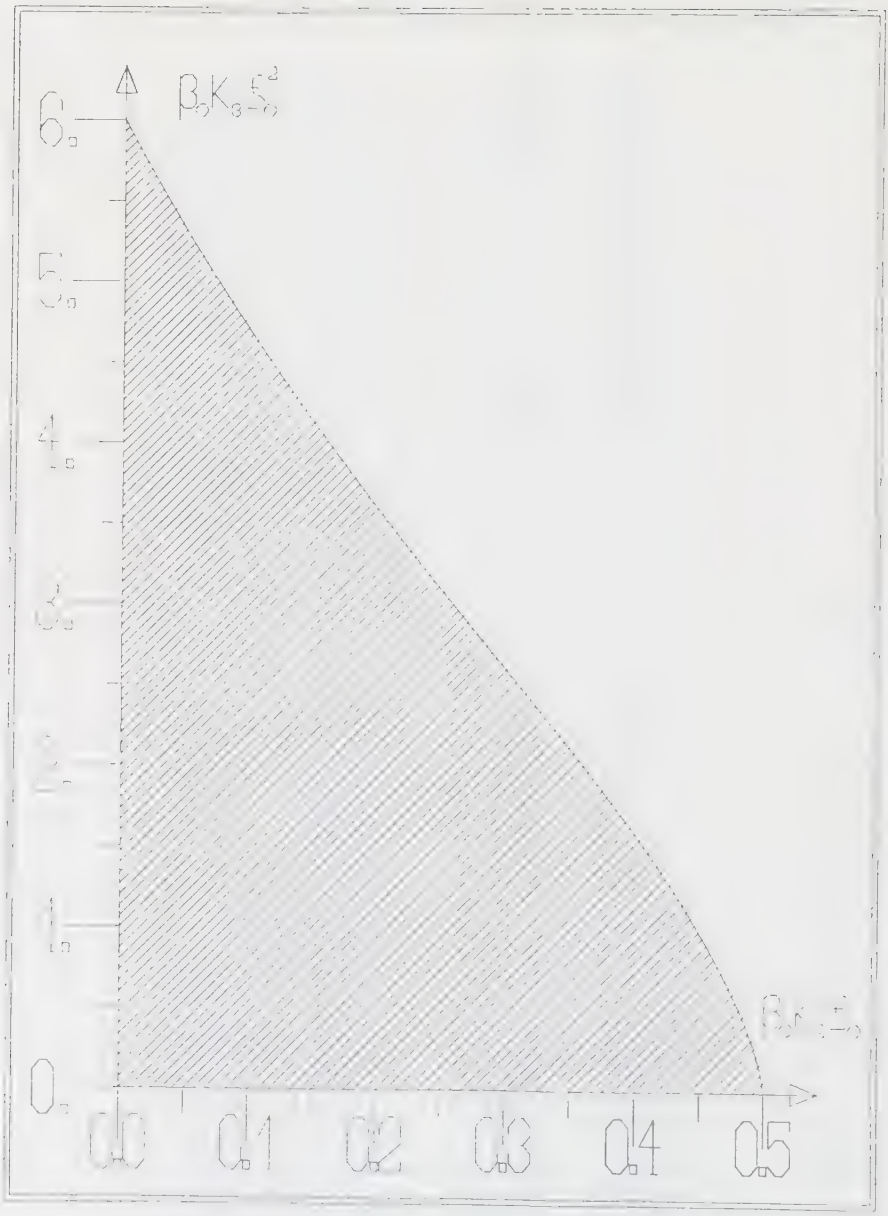


Abbildung II/2

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_1 \varrho_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_1 \varrho_0^2$, für die Satz II.14 die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 ist schraffiert.

etwa N = 10. D.h. wenn man nach 10 Schritten die Gültigkeit von (2.89) - (2.94) noch nicht erhalten hat, so betrachtet man die Konvergenzbedingung als nicht erfüllt. Hierdurch läßt sich bei vorgegebenem N für jede Kombination der μ_o und χ_o stets nach endlich vielen Rechenschritten die Entscheidung treffen, ob die Voraussetzungen von Satz II.14 erfüllt sind. Dieser rekursiv-algorithmische Entscheidungsprozess eignet sich sehr gut zur Programmierung. Man kann die Voraussetzungen von Satz II.14 daher als (Fortran-) Funktionsunterprogramm schreiben. Die Funktion hat den Typ "Logical", wobei der Funktionswert ".TRUE." bedeutet, daß die Voraussetzungen von Satz II.14 erfüllt sind, während der Funktionswert ".FALSE." besagt, daß dies nicht der Fall ist. Für die in Tabelle II/2 angegebenen Wertekombinationen von μ_o und χ_o beweist man nun die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz II.14 durch Ausrechnen. Kleinere Werte von μ_o und χ_o kann man durch geeignete Vergrößerung der Konstanten K_2 und K_3 stets auf die in Tabelle II/2 angegebenen Werte vergrößern. ■

Fortran-Programm zur Überprüfung der Voraussetzungen von Satz II.14:

```
      LOGICAL FUNKTION KOVT2(MUEØ,CHIØ,N)
      REAL MUEØ,NUEØ,CHIØ,LAMØ,XIØ,EPSØ,PIØ
      REAL MUE1,NUE1,CHI1,LAM1,XI1,EPS1,PI1
      REAL PHI,PSI,SUM,SUM1,SUM2,A,B,A1,B1,C1
      INTEGER K,N
      IF (MUEØ.GT.Ø.5) GO TO 2Ø
      IF (MUEØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      IF (CHIØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      NUEØ=Ø.Ø
      LAMØ=Ø.Ø
      XIØ=Ø.Ø
      EPSØ=Ø.Ø
      PIØ=1.Ø
      SUM=Ø.Ø
      K=Ø
   1Ø CONTINUE
      SUM1=SUM+EPSØ
      IF (NUEØ.GE.1.Ø) GO TO 2Ø
      IF (SUM1.GT.2.Ø) GO TO 2Ø
      A=1.Ø+Ø.5*NUEØ
      B=1.Ø-NUEØ
      A1=(CHIØ+2.Ø*A*XIØ+A*A*LAMØ)/(6.Ø*B*B*B)
      B1=(2.Ø+MUEØ+NUEØ*(Ø.5*MUEØ+Ø.25*NUEØ)/B)*NUEØ/B
      C1=Ø.5*NUEØ*(MUEØ+A*NUEØ)/(B*B*B)
      PHI=A1+B1+C1
      PSI=A1*A+Ø.5*B1+C1*A
      A=1.Ø-MUEØ-Ø.5*MUEØ*MUEØ
      A=1.Ø/A
      B=Ø.125 MUEØ*MUEØ*MUEØ+Ø.5*MUEØ*MUEØ
      MUE1=A*A*B*MUEØ
      NUE1=A*(PHI*MUEØ+PSI*NUEØ)
      PI1=A*B*PIØ
      EPS1=PHI*PIØ+PSI*EPSØ
      CHI1=A*A*A*B*B*CHIØ
      XI1=A*A*B*(PHI*CHIØ+PSI*XIØ)
      LAM1=A*A*(PHI*PHI*CHIØ+2.Ø*PHI*PSI*XIØ+PSI*PSI*LAMØ)
      SUM=SUM+(1.Ø+Ø.5*MUEØ)*PIØ
      SUM2=SUM+EPSØ+(1.Ø+Ø.5*A*A*B*MUEØ)*A*B*PIØ
```

```
      IF (NUE1.GT.NUEØ) GO TO 15
      IF (EPS1.GT.EPSØ) GO TO 15
      IF (XI1.GT.XIØ) GO TO 15
      IF (LAM1.GT.LAMØ) GO TO 15
      IF (PSI.GE.1.Ø) GO TO 15
      IF (SUM2.GT.2.Ø) GO TO 15
      KOVT2=.TRUE.
      RETURN
   15 K=K+1
      IF (K.GE.N+1) GO TO 2Ø
      MUEØ=MUE1
      CHIØ=CHI1
      NUEØ=NUE1
      PIØ=PI1
      EPSØ=EPS1
      XIØ=XI1
      LAMØ=LAM1
      GO TO 1Ø
   2Ø CONTINUE
      KOVT2=.FALSE.
      RETURN
      END
```

Diskussion: Ein Rückblick auf die in diesem Kapitel vorgelegten Ergebnisse kann unter zwei Gesichtspunkten erfolgen, die kaum voneinander zu trennen sind: Man kann einmal fragen, welche Verbesserungen im Vergleich zu älteren Arbeiten erzielt wurden; und zum anderen stellt sich die Frage, welche neuen Methoden der Beweisführung eben diese weiterreichenden Aussagen ermöglicht haben. Hierbei interessiert dann insbesondere, ob diese Beweismethodik auch in anderen Fällen verschärfte Aussagen liefert bzw. ob sie eine Verallgemeinerung gestattet.

Die erste der oben gestellten Fragen, d.h. die Frage nach den Verbesserungen, die im Vergleich zu älteren Arbeiten erzielt wurden, läßt sich leicht und anschaulich durch zwei Graphiken beantworten. Abbildung II/3 zeigt den Konvergenzbereich des Tschebyscheff-Verfahrens nach Satz II.14 im Vergleich zu dem durch Satz II.1 garantierten Konvergenzbereich. Dabei liefert der auf Döring [4] zurückgehende Satz II.1 sicher das beste Ergebnis aller bisherigen Arbeiten zu diesem Thema. Bei dem Vergleich der beiden Konvergenzbereiche (Abb. II/3) ist insbesondere zu berücksichtigen, daß Satz II.14 auch für große μ_o-Werte erheblich größere χ_o-Werte zuläßt als Satz II.1. Sucht man auf beiden Kurven die Punkte mit $\mu_o = \chi_o$, so erhält man für die Kurve nach Satz II.1 $\mu_o = \chi_o = 0.403$ und für die Kurve nach Satz II.14 $\mu_o = \chi_o = 0.482$.

Der obige Vergleich fällt noch deutlicher aus, wenn man die Ergebnisse von Satz II.9 in die Betrachtungen einbezieht. Die Abbildung II/4 macht deutlich, daß unter diesen Umständen die in diesem Kapitel bewiesenen Aussagen nicht nur die Ergebnisse früherer Arbeiten deutlich übertreffen, sondern sich bereits jenem Punkte nähern, der keine weiteren Verbesserungen mehr zuläßt. Dieser Punkt liegt bei $\mu_o = \frac{1}{2}$, denn für $\mu_o > \frac{1}{2}$ kann man leicht eine Funktion angeben, die die Voraussetzungen dieses Satzes mit Ausnahme von $\mu_o \leq 1/2$ erfüllt, aber keine Nullstelle in S_o besitzt. Sei nämlich $\varepsilon > 0$ beliebig, so besitzt $F(x) := x^2 + \varepsilon$ überhaupt keine Nullstelle. Es ist jedoch $F'(x) = 2x$, $F''(x) = 2$, $\| [F'(x)]^{-1} F(x) \| = | (x^2 + \varepsilon)/2x |$. Somit gilt für eine beliebige Startstelle $x_o \neq 0$:

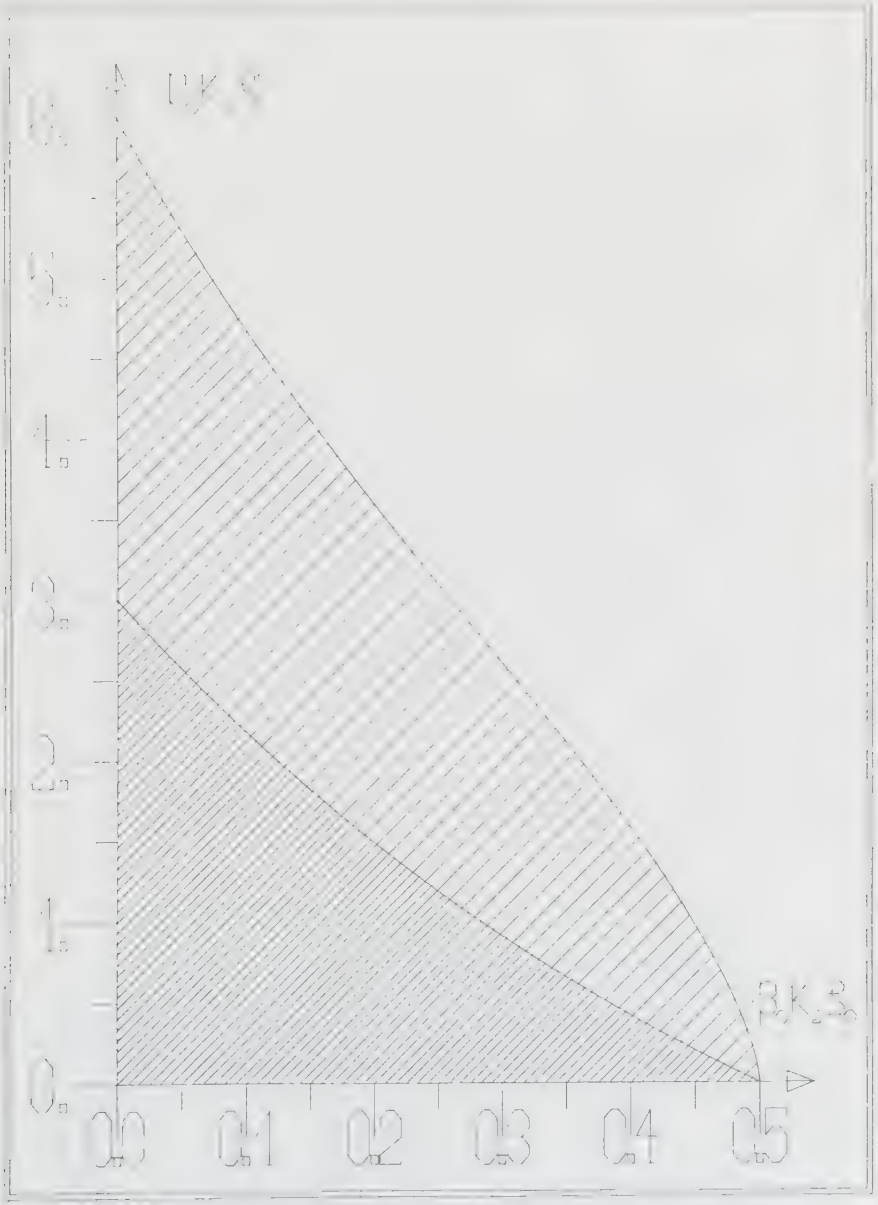


Abbildung II/3

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_o := \beta_o K_2 \mathcal{S}_o$ und $\chi_o := \beta_o K_1 \mathcal{S}_o^2$, für die Satz II.14 (obere Kurve) bzw. Satz II.1 mit R = 2 (untere Kurve) die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens garantiert. Der Bereich der jeweils zulässigen Wertekombinationen von μ_o und χ_o ist schraffiert.

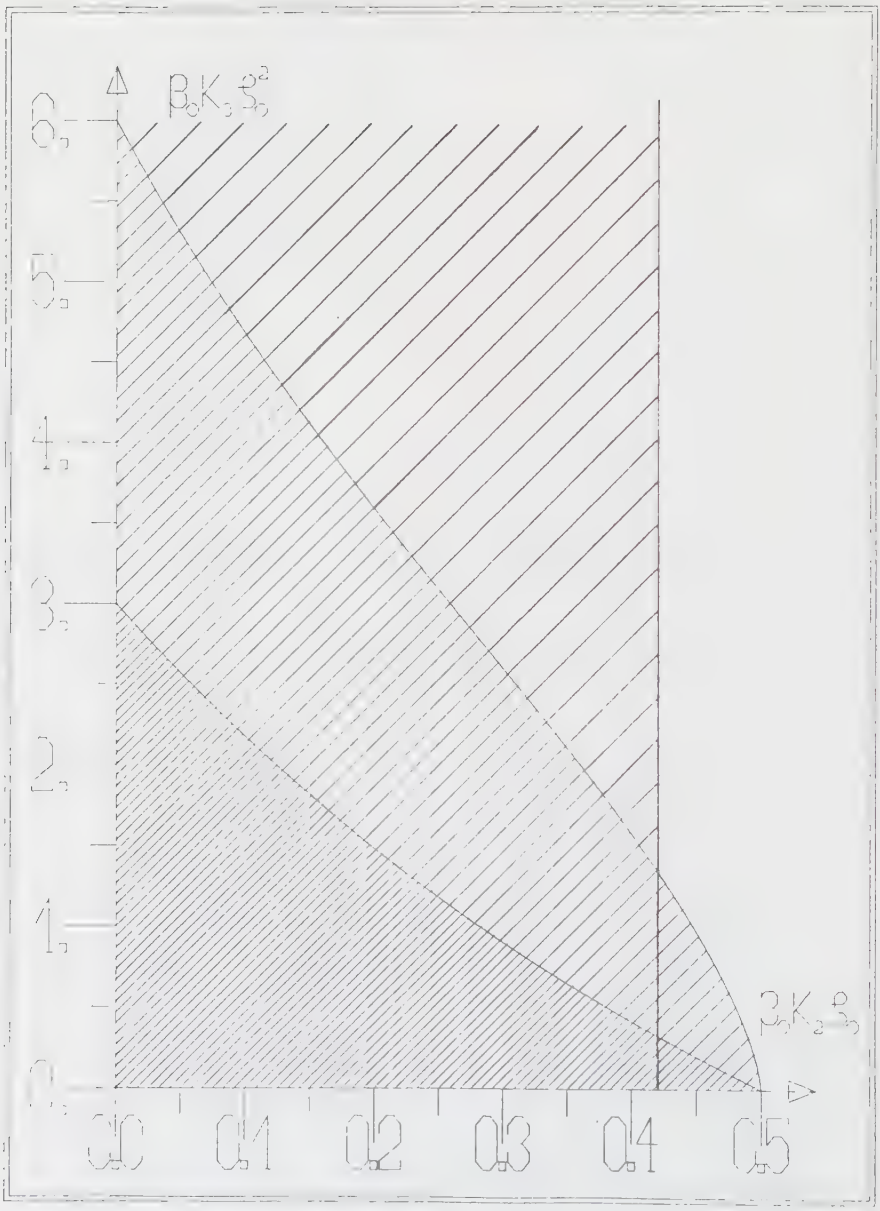


Abbildung II/4

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \varepsilon_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_3 \varepsilon_0^2$, für die Satz II.14 (obere Kurve) bzw. Satz II.1 mit R = 2 (untere Kurve) die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens garantiert. Satz II.3 garantiert für $\mu_0 \leq 0.42115$ die Konvergenz ohne Voraussetzungen über χ_0. Der Bereich der jeweils zulässigen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 ist schraffiert.

$$\mu_0 = \|[F'(x_0)]^{-1}\| \sup_x \|F''(x)\| \, \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\|$$
$$= \left| \frac{1}{2 x_0} \; 2 \; \frac{x_0^2 + \varepsilon}{2 x_0} \right| = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{x_0^2}\right) > \frac{1}{2}$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ kann man μ_0 jedoch dem Wert $\frac{1}{2}$ beliebig genau von oben annähern. Der Punkt $\mu_0 = \frac{1}{2}$ ist also nicht zu übertreffen. In Satz II.9 wird der Punkt $\mu_0 = 0.42115$ erreicht. Da dieser Satz an die dritte Ableitung von F keinerlei Bedingungen stellt, ist er in seinen Voraussetzungen - bis auf den um etwa 15% kleineren μ_0-Wert - identisch mit Satz I.2 (über das Newton-Verfahren). Es ist also gelungen, die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens unter beinahe ebenso schwachen Voraussetzungen zu beweisen, wie es für das Newton-Verfahren möglich ist. Dabei wird durch Satz II.11 aber dennoch die höhere Konvergenzgeschwindigkeit des Tschebyscheff-Verfahrens im Vergleich zum Newton-Verfahren garantiert.

Trotz der erreichten Verbesserungen bleibt jedoch festzustellen, daß es in dieser Arbeit nicht gelungen ist, die Konvergenzvoraussetzungen des Tschebyscheff-Verfahrens bis auf die Konvergenzvoraussetzungen des Newton-Verfahrens (Satz I.2) abzuschwächen. Dabei haben "Erfolg" und "Mißerfolg" gleichermaßen ihre Ursache in der Beweismethodik. Der "Erfolg" beruht nämlich darauf, das Tschebyscheff-Verfahren als ein "gestörtes" Newton-Verfahren zu behandeln. Dies begründet aber gleichzeitig den "Mißerfolg", denn ein gestörtes Verfahren hat vermutlich etwas schlechtere Konvergenzeigenschaften als das entsprechende ungestörte Verfahren. Das schon rein sprachliche Paradoxon, das Tschebyscheff-Verfahren, d.h. das "verbesserte" Newton-Verfahren, als ein "gestörtes" Newton-Verfahren zu behandeln, zeigt bereits, daß man die in dieser Arbeit vorgelegten Resultate mit großer Wahrscheinlichkeit noch verbessern kann, wenn man in den entsprechenden Beweisen nicht das Newton-Verfahren oder das gemischte Newton-Verfahren als "Hilfsverfahren" verwendet, sondern irgendein anderes Verfahren, dessen spezielle Gestalt ebenso wie die des Newton-Verfahrens sehr günstige Abschätzungen gestattet. Das Hilfsverfahren selbst braucht dabei keinerlei numerische Bedeutung zu haben, sondern muß lediglich selbst unter möglichst günstigen Bedingungen konvergieren und sollte außerdem eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Tschebyscheff-Verfahren besitzen. Denkbar wäre es etwa, ein hypothetisches Verfahren zu betrachten, das sich aus der Taylorentwicklung bis zum quadratischen Glied ergibt, d.h.

$$F(x_n) + F'(x_n)\, e_n + \frac{1}{2} F''(x_n)\, e_n^{(2)} = 0$$
$$x_{n+1} = x_n + e_n$$

Der Konvergenzbeweis für ein solches Verfahren würde sicher sehr günstige Abschätzungen gestatten, die sich dann auf das Tschebyscheff-Verfahren übertragen ließen. (Numerisch wäre ein solches Verfahren natürlich sinnlos, da jeder Schritt die iterative Lösung einer quadratischen Gleichung erforderte.)

Der Erfolg der Sätze II.7 und II.14 ergibt sich aber nicht allein aus der Behandlung des Tschebyscheff-Verfahrens als eines gestörten Newton-Verfahrens, sondern erst aus der Verknüpfung dieser Idee mit einer Beweismethode, die man rein deskriptiv als "retardierte Induktion" bezeichnen könnte. Da diese Methode unter gewissen, im folgenden näher erläuterten Voraussetzungen bei vielen Induktionsbeweisen speziell der numerischen Mathematik leicht eine nicht unwesentliche Verbesserung der Aussagen liefert, soll sie hier näher betrachtet werden.

Das Prinzip der retardierten Induktion ist bei weitem nicht so tiefgründig wie der Name vermuten läßt, es ist im Gegenteil geradezu tri-

vial: Während man beim normalen Induktionsbeweis die Behauptung für $n = 0$ beweist und dann zeigt, daß aus der Gültigkeit der Behauptung für k auch die Gültigkeit für k+1 folgt, werden bei der retardierten oder verzögerten Induktion die zu beweisenden Beziehungen für $n = 0,1,2,\ldots,N$ einzeln gezeigt und dann wird bewiesen, daß aus der Gültigkeit dieser Beziehungen für $k \geq N$ auch die Gültigkeit für k+1 folgt. Eine solche Unterscheidung mag auf den ersten Blick sinnlos, ja absurd erscheinen. Man muß sich aber vergegenwärtigen, daß die vollständige Induktion bei vielen Beweisen speziell der numerischen Mathematik nur eine Hilfskonstruktion ist, die für alle Glieder einer Folge gewisse Eigenschaften sichert. Dabei wird der Induktionsbeweis oftmals erst dadurch möglich, daß man mehr beweist als unbedingt notwendig ist und daher auch mehr voraussetzen muß als unbedingt notwendig. Betrachtet man etwa den Beweis von Satz II.7, so erkennt man, daß im Grunde nur die Bedingungen (2.42) und (2.43) für jedes n erfüllt sein müssen. Wenn man dieses nun induktiv beweisen will, so müssen gleichzeitig die Bedingungen (2.44) - (2.47) erfüllt sein, da sonst der Schluß von k auf k+1 nicht gelingt. Man sieht leicht, daß für den Induktionsbeweis mehr vorausgesetzt und durch den Induktionsbeweis mehr gezeigt wird als tatsächlich notwendig ist. Betrachtet man nur die Bedingung (2.42), die für den Beweis von Satz II.7 eine conditio sine qua non ist, so ist diese Bedingung sicher erfüllt, wenn die nach (2.39) berechenbaren γ_n zunächst etwas wachsen und später wieder etwas fallen, aber stets kleiner als 1 bleiben. Würde man jedoch den Induktionsbeweis mit $n = 0$ beginnen, so wäre er wegen (2.44) nur dann möglich, wenn die γ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eine monoton fallende Folge bildeten. Dies könnte man jedoch nur dadurch erreichen, daß man den μ_0-Wert verkleinerte und damit die Aussage des Satzes erheblich einengte. Dies wird sehr anschaulich, wenn man nachrechnet, welche μ_0-Werte für ein gegebenes N noch zulässig sind; man erhält:

$N = 0$	:	$\mu_0 = 0.0$
$N = 1$	:	$\mu_0 \leq 0.373679$
$N = 2$	:	$\mu_0 \leq 0.418448$
$N = 3$	:	$\mu_0 \leq 0.421159$
$N = 4,5,\ldots,10$	:	$\mu_0 \leq 0.421186$

Man erkennt, daß man die Aussage des Satzes mit wachsendem N natürlich nicht beliebig ausweiten kann, daß sich verzögerter Einstieg in den Induktionsbeweis aber sehr wohl bezahlt macht. Völlig analoge Verhältnisse hat man bei Satz II.14. Der Abbildung II/5 entnimmt man wie sich eine verschiedene Wahl von N auf die Aussagen dieses Satzes auswirkt. Es soll nun noch am Beispiel von Satz II.1 gezeigt werden, daß man auch in anderen Fällen die Ergebnisse eines Satzes durch retardierte Induktion deutlich verbessern kann. Man muß also die wesentlichen Beziehungen des Beweises von Satz II.1 für $n = 1,2,\ldots,N$ voraussetzen und überdies fordern, daß man diese Beziehungen für $k \geq N$ induktiv beweisen kann. Satz II.1 nimmt dann die Gestalt an:

Satz II.17: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \delta_0$$

$$S_0 := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq R\,\delta_0\} \subset M \text{ für ein festes } R \geq 2$$

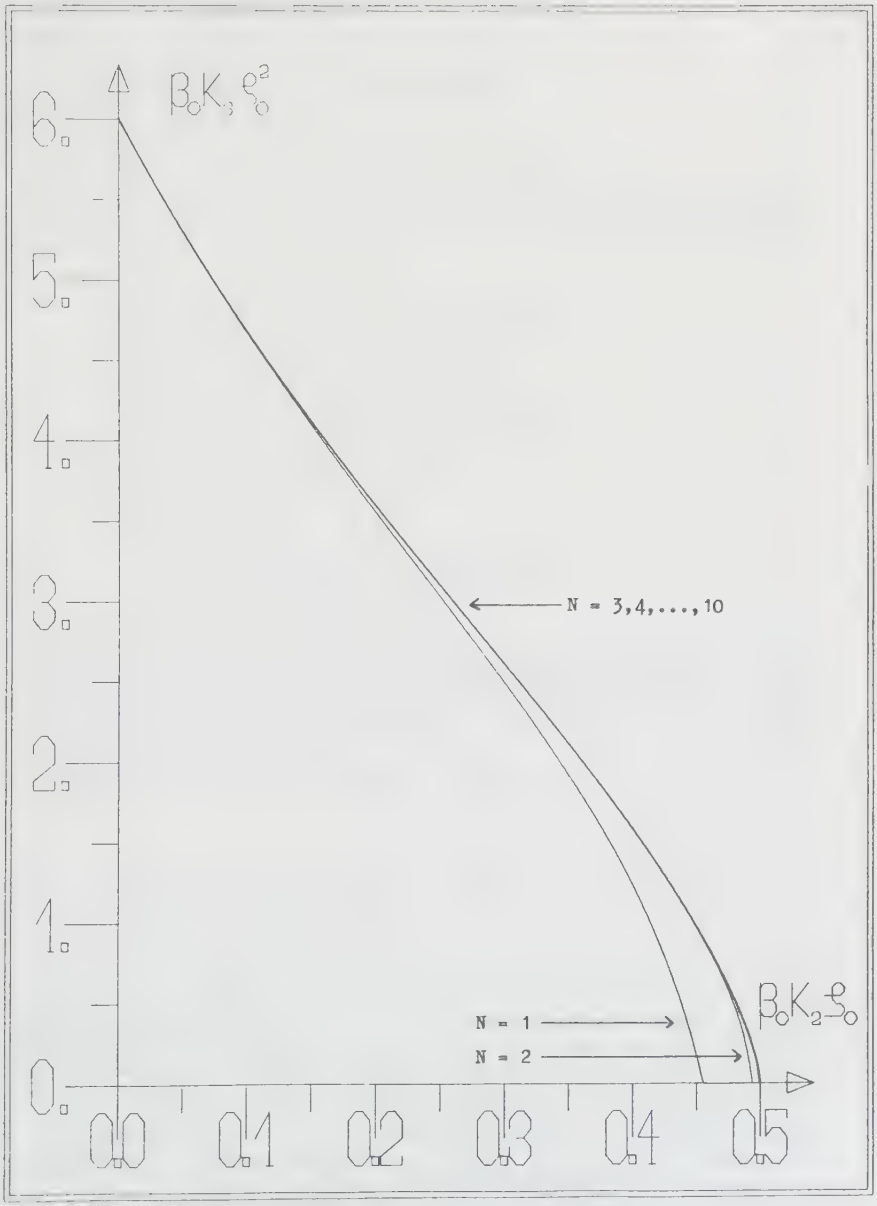


Abbildung II/5

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \varrho_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_3 \varrho_0^2$, für die Satz II.14 für verschiedene Wahl von N die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 liegt zwischen den jeweiligen Kurven und den Koordinatenachsen.

$$\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq K_2$$
$$\sup_{x \in S_0} \| F'''(x) \| \leq K_3$$
$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \eta_0 \leq \tfrac{1}{2}$$
$$\chi_0 := \beta_0 K_3 \eta_0^2$$

Überdies gelte:
Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch
(2.124) μ_0 , χ_0 , sowie $\lambda_0 = 1$
und

$$(2.125) \quad \mu_{n+1} := \frac{\mu_n \left[\tfrac{1}{6} \chi_n (1 + \tfrac{1}{2} \mu_n)^3 + \tfrac{1}{4} (2 + \tfrac{1}{2} \mu_n) \mu_n^2 \right]}{\left[1 - \mu_n (1 + \tfrac{1}{2} \mu_n) \right]^2}$$

$$(2.126) \quad \chi_{n+1} := \frac{\chi_n \left[\tfrac{1}{6} \chi_n (1 + \tfrac{1}{2} \mu_n)^3 + \tfrac{1}{4} (2 + \tfrac{1}{2} \mu_n) \mu_n^2 \right]^2}{\left[1 - \mu_n (1 + \tfrac{1}{2} \mu_n) \right]^3}$$

$$(2.127) \quad \lambda_{n+1} := \alpha_n \lambda_n$$
$$\text{mit } \alpha_n := \frac{\tfrac{1}{6} \chi_n (1 + \tfrac{1}{2} \mu_n)^3 + \tfrac{1}{4} (2 + \tfrac{1}{2} \mu_n) \mu_n^2}{1 - \mu_n (1 + \tfrac{1}{2} \mu_n)}$$

$$(2.128) \quad \varepsilon_n := (1 + \tfrac{1}{2} \mu_n) \lambda_n$$

rekursiv definierten Zahlen μ_n, χ_n, λ_n, α_n, ε_n für $n \leq N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

$$(2.129) \quad \mu_n (1 + \tfrac{1}{2} \mu_n) < 1 \qquad \forall\, n \leq N$$
$$(2.130) \quad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n \leq R \qquad \forall\, n \leq N$$
$$(2.131) \quad \alpha_N < 1$$
$$(2.132) \quad \mu_{N+1} \leq \mu_N$$
$$(2.133) \quad \chi_{N+1} \leq \chi_N$$
$$(2.134) \quad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_N + (1 + \tfrac{1}{2} \mu_N) \frac{\alpha_N}{1 - \alpha_N} \lambda_N \leq R$$

Dann gelten die Behauptungen (2.4), (2.5) von Satz II.1.

Beweis: Alle für den Beweis von Satz II.1 wichtigen Beziehungen werden durch die Voraussetzungen garantiert. Ebenso kann man für $k \geq N$ den Induktionsbeweis wie in Satz II.1 führen. Lediglich $x_{n+1} \in S_0$ muß hier etwas anders bewiesen werden, nämlich durch

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - x_0 \| &\leq \| x_{n+1} - x_n \| + \cdots + \| x_1 - x_0 \| \\
&\leq (1 + \tfrac{1}{2} \mu_n) \eta_n + \cdots + (1 + \tfrac{1}{2} \mu_0) \eta_0 \\
&= \left[(1 + \tfrac{1}{2} \mu_n) \lambda_n + \cdots + (1 + \tfrac{1}{2} \mu_0) \lambda_0 \right] \eta_0 \\
&= \left[\varepsilon_n + \cdots + \varepsilon_0 \right] \eta_0 \qquad \leq R \eta_0 \quad \text{nach (2.130) für } n \leq N \\
&\leq \left[\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{N+i} \right] \eta_0 \\
&= \left[\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \sum_{i=1}^{\infty} (1 + \tfrac{1}{2} \mu_{N+i}) \lambda_{N+i} \right] \eta_0
\end{aligned}$$

$$\leq \left[\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \left(1 + \tfrac{1}{2}\mu_N\right) \frac{\alpha_N}{1 - \alpha_N}\, a_N\right] \varrho_0$$

$$\leq R\, \varrho_0 \qquad \text{nach (2.134) für } n \geq N$$

Damit ist dann alles bewiesen. ■

Man sieht leicht, daß die Voraussetzungen von Satz II.17 für N = 0 mit denen von Satz II.1 identisch sind. Einzig für die dortige Bedingung (2.3) ist dies vielleicht nicht unmittelbar einsichtig. Aus (2.134) und (2.128) folgt aber mit (2.127) für N = 0 :

$$\varepsilon_0 + \left(1 + \tfrac{1}{2}\mu_0\right) \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}\, a_0 \leq R$$

D.h. wegen $a_0 = 1$, $\varepsilon_0 = \left(1 + \tfrac{1}{2}\mu_0\right) a_0$

$$\left(1 + \tfrac{1}{2}\mu_0\right) + \left(1 + \tfrac{1}{2}\mu_0\right) \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \leq R$$

$$\left(1 + \tfrac{1}{2}\mu_0\right) \leq (1 - \alpha_0)\, R$$

denn $\alpha_0 < 1$ nach (2.131)

$$R\,\alpha_0 + 1 + \tfrac{1}{2}\mu_0 \leq R$$

Wenn man hier nun nach (2.127) α_0 einsetzt, ist dies die Bedingung (2.3) aus Satz II.1.
Wie sich eine unterschiedliche Wahl von N auf die Ergebnisse von Satz II.17 auswirkt, der für N = 0 mit Satz II.1 identisch ist, entnimmt man der Abbildung II/6. Auch hier kann man gut erkennen, wie sich durch retardierte Induktion die Aussagen eines Satzes ausweiten lassen.

Ergänzungen: In den Sätzen II.1, II.14 und II.17 kann man die Forderung der dreimaligen stetigen Differenzierbarkeit des Operators F mit

$$\sup_{x \in S_0} \|F'''(x_0)\| \leq K_3$$

ersetzen durch die etwas schwächere Bedingung der zweimaligen Lipschitz-stetigen Differenzierbarkeit, d.h. es wird gefordert

$$\|F''(y_1) - F''(y_2)\| \leq K_3 \|y_1 - y_2\| \qquad \forall\, y_1, y_2 \in S_0$$

Die Beweise der Sätze verlaufen dann völlig analog, wie schon in den Ergänzungen zu Kapitel I in Bezug auf das Newton-Verfahren näher ausgeführt wurde. Auch die Konvergenzordnung 3 des Tschebyscheff-Verfahrens (Satz II.3) bleibt unter diesen Bedingungen erhalten.
Ein zu Satz II.7 analoger Satz ließe sich auch für den Fall beweisen, daß die zweite Ableitung F'' von F nicht mehr stetig ist. Man müßte dann allerdings die Lippschitz-Stetigkeit der ersten Ableitung fordern. Hierdurch würde dann nämlich die für Satz II.7 wichtige Konvergenz des Newton-Verfahrens gesichert. Exakt die gleiche Aussage wie in Satz II.7 würde man für diesen Fall jedoch nicht erhalten, da in den Sätzen II.4 und II.6 gewisse Modifikationen notwendig wären. Auch die superquadratische Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens, die unter den Bedingungen von Satz II.7 durch Satz II.11 noch garantiert wird, würde bei nicht mehr stetigem F'' verlorengehen.

Der Abbildung II/7 entnimmt man schließlich noch, wie sich die Kon-

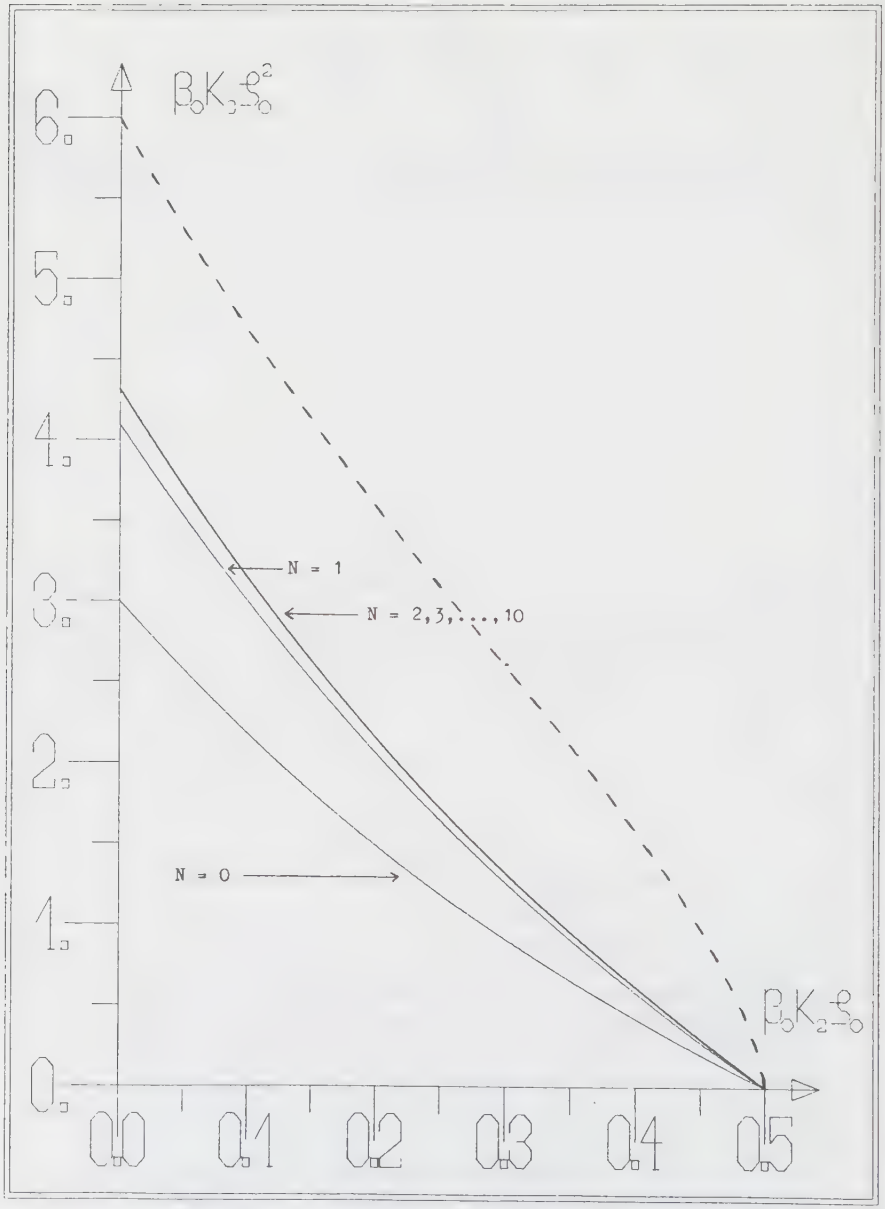


Abbildung II/6

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \varepsilon_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_2 \varepsilon_0^2$, für die Satz II.17 mit R = 2 und für verschiedene Wahl von N die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 liegt zwischen der jeweiligen Kurve und den Koordinatenachsen. Für N = 0 erhält man das Ergebnis von Satz II.1. Die unterbrochene Kurve bezieht sich auf die Aussage von Satz II.14.

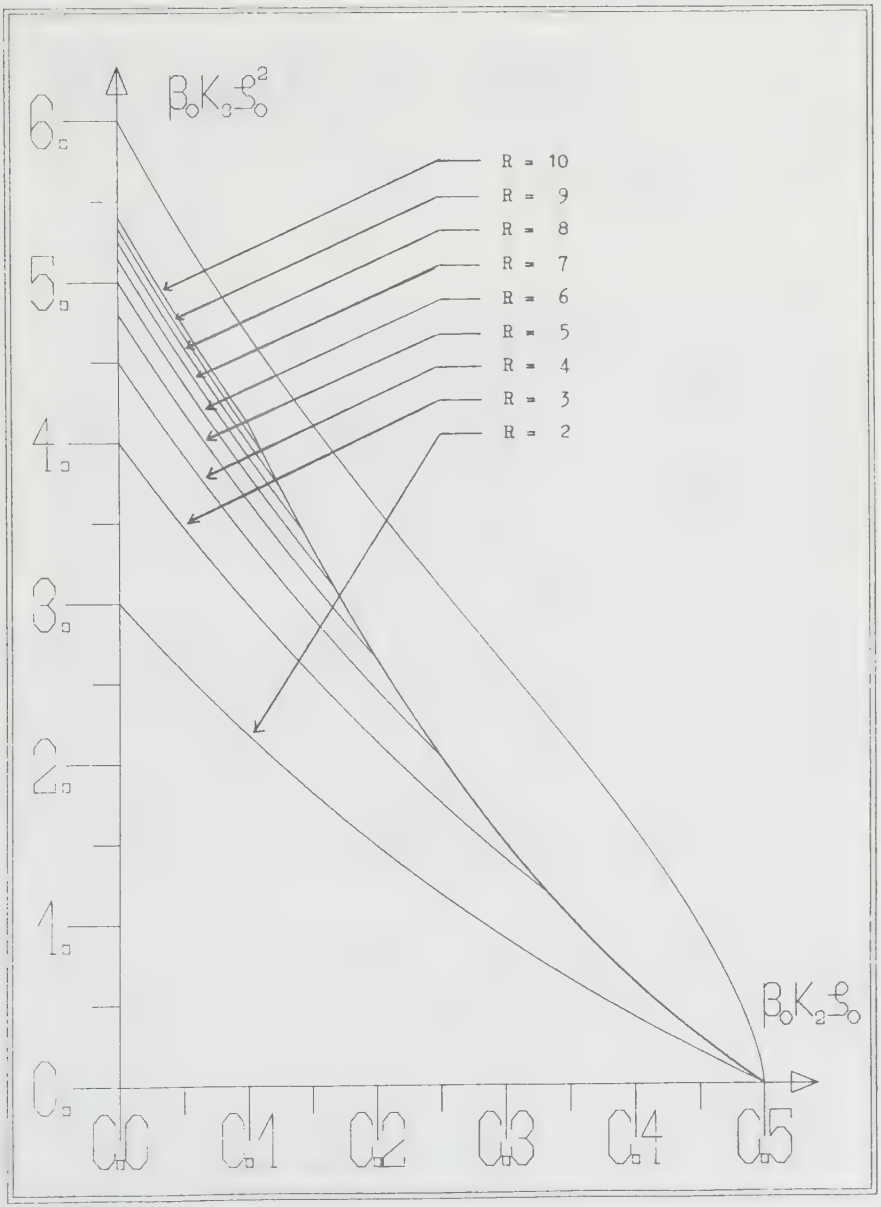


Abbildung II/7

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \vartheta_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_3 \vartheta_0^2$, für die Satz II.1 für verschiedene Wahl von R die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Werte für μ_0 und χ_0 liegt zwischen den jeweiligen Kurven und den Koordinatenachsen.

vergenzaussagen von Satz II.1 für verschiedene Werte von R ändern. Die Konvergenzbereiche sind dort für R = 2,3,4,...,10 dargestellt. Man erkennt hier sehr schön, wie sich für $R \to \infty$ die von Döring in [4] als notwendige Bedingung für die Beweisführung errechnete "Grenzkurve" ausbildet. Ein Vergleich mit dem ebenfalls in Abbildung II/7 noch einmal eingetragenen Konvergenzbereich nach Satz II.14 zeigt aber, daß dieser durch Satz II.1 auch für beliebig großes R nicht erreicht wird.

Literatur:

[1] Collatz, L. — Funktionalanalysis und numerische Mathematik Springer. 1964

[2] Collatz, L. — Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen. Arch. Rat. Mech. Anal. 2, 66 - 75 (1958/59)

[3] Döring, B. — Ein Satz über das verbesserte Newton-Verfahren. ZAMM 49 (1969), Sonderheft GAMM-Tagung.

[4] Döring, B. — Das Tschebyscheff-Verfahren in Banach-Räumen. Numer. Math. 15 , 175 - 195 (1970).

[5] Döring, B. — Einige Sätze über das Verfahren der tangierenden Hyperbeln in Banach-Räumen. Aplikace Matematiky 15 (1970), 419 - 464.

[6] Lang, S. — Analysis II Addison-Wesley. Reading/Mass. 1969

[7] Moore, R. H. — Newton's method and variations. In Anselone, P. M. (Ed.): Nonlinear integral equations. Madison: The University of Wisconsin Press 1964, 65 - 98.

Kapitel III

Einige Sätze zum
Halley-Verfahren

Das in diesem Kapitel behandelte Halley-Verfahren, das in der Literatur auch als Verfahren der tangierenden Hyperbeln bezeichnet wird, approximiert durch seine Iterationsvorschrift die Taylorentwicklung eines gegebenen Operators bis zum quadratischen Term viel genauer als das im vorhergehenden Kapitel betrachtete Tschebyscheff-Verfahren. Aus dieser Tatsache ergeben sich sowohl beweistechnisch wie auch in der praktischen Anwendung dieses Verfahrens Vorteile und Nachteile. Der für den Anwender wohl gravierendste Nachteil des Halley-Verfahrens ist der, daß bei jedem Iterationsschritt zwei lineare Operatoren invertiert werden müssen, so daß trotz der höheren Konvergenzgeschwindigkeit im Vergleich zum Newton-Verfahren und auch im Vergleich zum Tschebyscheff-Verfahren insgesamt ein eher größerer Arbeitsaufwand als bei diesen Verfahren veranschlagt werden muß. Eine Rechenzeitersparnis darf man daher naturgemäß nur in Ausnahmefällen erwarten, während man in der Regel sogar ungünstigere Zeiten erhalten wird. Hierin ist wohl auch der Grund für das äußerst geringe Interesse zu suchen, das bisher seitens der Anwender dem Halley-Verfahren entgegengebracht wurde. Die bessere Approximation der Taylorentwicklung bis zum quadratischen Term durch das Halley-Verfahren hat auch beweistechnische Nachteile, sofern man das Halley-Verfahren als "gestörtes" Newton-Verfahren bzw. als "gestörtes" gemischtes Newton-Verfahren behandelt, eine Methode, die sich in Kapitel II in Bezug auf das Tschebyscheff-Verfahren als sehr fruchtbar erwiesen hat. Da jedoch das Halley-Verfahren eine stärkere "Störung" des Newton- bzw. gemischten Newton-Verfahrens bedeutet als das Tschebyscheff-Verfahren, wird man hier nicht ganz so gute Ergebnisse erhalten, wie sie in Kapitel II in analoger Weise für das Tschebyscheff-Verfahren angegeben werden konnten.

Diese objektiv gegebenen Nachteile des Halley-Verfahrens lassen aber für meine Begriffe seine nähere Untersuchung durchaus nicht a priori als sinnlos erscheinen. Kommt doch das Halley-Verfahren der Taylorentwicklung bis zum quadratischen Term näher als manch anderes Verfahren 3. Ordnung. Und kann man doch daher "rein gefühlsmäßig" erwarten, daß dieses Verfahren die zu lösende Gleichung besser als manch anderes approximiert. Wird dann aber nicht häufig ein deutlich größerer Konvergenzbereich zu erwarten sein als bei manch einem der vergleichbaren Iterationsverfahren? Diese bisher nicht bewiesene Erwartung mathematisch abzusichern, ist eine Herausforderung, die die Beschäftigung mit dem Halley-Verfahren besonders reizvoll und zugleich nützlich erscheinen läßt, denn jeder Anwender wäre sicher gerne bereit einen etwas größeren Arbeitsaufwand hinzunehmen, wenn dies durch einen größeren Konvergenzbereich belohnt würde. Die recht genaue Approximation der Taylorentwicklung bis zum quadratischen Term durch das Halley-Verfahren gestattet überdies spezielle Beweismethoden, die wegen der hierdurch sehr guten Abschätzungen zu teilweise überraschenden Ergebnissen

führen. Wegweisend in dieser Richtung war Döring mit [1]. Der entsprechende Satz aus dieser Arbeit wird daher in leicht modifizierter und verallgemeinerter Form am Anfang dieses Kapitels stehen.

Dieses Kapital hat aber nicht nur den Zweck, neue Ergebnisse zum Halley-Verfahren vorzulegen, sondern es verfolgt auch die Absicht, noch einmal ausführlich darzustellen, welche nicht unerheblichen Verbesserungen der Aussagen eines Satzes man allein durch die bereits in Kapitel II kurz dargestellte und erfolgreich angewandte Methode der retardierten Induktion beim Beweis eines solchen Satzes erzielen kann. Da nämlich dieses Kapitel über das Halley-Verfahren in Bezug auf die hier verwendeten Beweisideen und -methoden eine größere Vielfalt zeigt als Kapitel II, kann man hier auch besser als dort erkennen, daß die durch das Prinzip der retardierten Induktion erreichbaren Verbesserungen weitgehend unabhängig sind von der übrigen Beweismethode. Dies bedeutet aber, daß man sehr viele Sätze der konstruktiven, numerischen Mathematik, die ja überwiegend induktiv bewiesen werden, beinahe schematisch in ihren Aussagen verbessern könnte. Der folgende Satz, der in seiner Beweisidee auf Döring [1] zurückgeht, liefert in seiner allgemeinen Formulierung nicht nur überraschende Ergebnisse, sondern er ist in seinen Voraussetzungen auch genügend übersichtlich, um an diesem Beispiel das Prinzip der retardierten Induktion noch einmal ausführlich zu erläutern. Der Satz soll daher gleich in allgemeiner Formulierung angegeben werden:

Satz III.1: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existieren die beschränkten Inversen $[F'(x_0)]^{-1}$ und $[I - \frac{1}{2}[F'(x_0)]^{-1} \cdot F''(x_0)[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen $\beta_0, K_2, K_3, \delta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq \beta_0$$

$$\| [I - \tfrac{1}{2}[F'(x_0)]^{-1} F''(x_0)[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)]^{-1}[F'(x_0)]^{-1}F(x_0) \| \leq \delta_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \| x - x_0 \| \leq 2\delta_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq K_2$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F'''(x) \| \leq K_3$$

$$\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0 < 1$$

$$\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$$

Überdies gelte: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch

$$\tilde{\mu}_0, \ \nu_0, \ \delta_0 \text{ sowie } \varepsilon_0 := 1$$

und

$$\lambda_n := \frac{\frac{1}{6}\{\frac{3}{2}\tilde{\mu}_n^2 + \nu_n + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n \nu_n\}}{(1 - \tilde{\mu}_n)(1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n)} \tag{3.1}$$

$$\delta_n := \varepsilon_n \delta_0 \tag{3.2}$$

$$\tilde{\mu}_{n+1} := \frac{\tilde{\mu}_n \lambda_n}{(1 - \tilde{\mu}_n)(1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n \lambda_n)} \tag{3.3}$$

$$(3.4) \qquad \nu_{n+1} := \frac{\nu_n \alpha_n^2}{(1 - \tilde{\mu}_n)(1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n \alpha_n)^2}$$

$$(3.5) \qquad \varepsilon_{n+1} := \frac{\varepsilon_n \alpha_n}{1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n \alpha_n}$$

rekursiv definierten Zahlen α_n, δ_n, $\tilde{\mu}_n$, ν_n, ε_n für $n \leq N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

$$(3.6) \qquad \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n \alpha_n < 1 \quad , \quad \tilde{\mu}_n < 1 \qquad \forall\, n \leq N$$

$$(3.7) \qquad \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_n \leq 2 \qquad \forall\, n \leq N$$

$$(3.8) \qquad \tilde{\mu}_{N+1} \leq \tilde{\mu}_N$$

$$(3.9) \qquad \nu_{N+1} \leq \nu_N$$

$$(3.10) \qquad \frac{\alpha_N}{1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_N \alpha_N} < 1$$

$$(3.11) \qquad \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \frac{\alpha_N}{1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_N \alpha_N - \alpha_N}\,\varepsilon_N \leq 2$$

Dann gilt:

(3.12) Die durch x_0 und $x_{n+1} := x_n - \left[I - \frac{1}{2}\left[F'(x_n)\right]^{-1} F''(x_n)\left[F'(x_n)\right]^{-1} \cdot F(x_n)\right]\left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

(3.13) Es gilt $F(x^*) = 0$.

Beweis: Zusätzlich zu den durch (3.1) - (3.5) definierten Folgen wird noch die durch β_0 und

$$(3.14) \qquad \beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1 - \tilde{\mu}_n}$$

rekursiv definierte Folge $\{\beta_n\}$ eingeführt. Es wird nun gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (3.1) - (3.5) und (3.14) definierten Zahlen α_n, δ_n, $\tilde{\mu}_n$, ν_n, ε_n, β_n für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren sowie

$$(3.15) \qquad \tilde{\mu}_n \geq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; \tilde{\mu}_{n+1} \leq \tilde{\mu}_n \;\; \forall\, n \geq N$$

$$(3.16) \qquad \nu_n \geq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; \nu_{n+1} \leq \nu_n \;\; \forall\, n \geq N$$

$$(3.17) \qquad \alpha_n \geq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \;\; \forall\, n \geq N$$

$$(3.18) \qquad \varepsilon_n \geq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(3.19) \qquad \beta_n \geq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(3.20) \qquad \delta_n \geq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; \sum_{i=0}^{k} \delta_i \leq 2\delta_0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}, \text{ d.h. insbesondere } \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \leq 2\delta_0$$

Denn: Wegen (3.6) existieren die durch (3.1) - (3.5) und (3.14) definierten Zahlen und sind positiv oder Null für $n \leq N+1$, da $\tilde{\mu}_0$, ν_0,

δ_0 , $\varepsilon_0 \geq 0$ gilt. Die Rekursionsausdrücke (3.1) und (3.3), (3.4) sind in den $\tilde{\mu}_n$, ν_n , λ_n , ε_n monoton fallend, d.h.

$$0 \leq \tilde{\mu}_{n+1} \leq \tilde{\mu}_n < 1 \quad , \quad 0 \leq \nu_{n+1} \leq \nu_n$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_{n+1} \leq \lambda_n$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{\mu}_{n+2} \leq \tilde{\mu}_{n+1} \quad ; \quad \nu_{n+2} \leq \nu_{n+1}$$

usw.

Wegen (3.8), (3.9) gilt dann (3.6) für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß die durch (3.1) - (3.5) und (3.14) definierten Folgen für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren und (3.15) - (3.19) erfüllen. Der erste Teil von (3.20) folgt ebenfalls unmittelbar. Der zweite Teil ergibt sich so: Für $k \leq N$ gilt wegen (3.2) und (3.7)

$$\begin{aligned} \delta_0 + \cdots + \delta_k &= (\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_k) \delta_0 \\ &\leq 2 \delta_0 \end{aligned}$$

Ist aber $k \geq N$, so gilt wegen (3.5) sowie (3.15) - (3.17):

$$\varepsilon_{N+j} = \frac{\lambda_{N+j-1}}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_{N+j-1} \lambda_{N+j-1}} \varepsilon_{N+j-1} \leq \frac{\lambda_N}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_N \lambda_N} \varepsilon_{N+j-1}$$

$$\leq \left(\frac{\lambda_N}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_N \lambda_N} \right)^j \varepsilon_N$$

Dann hat man aber

$$\begin{aligned} \delta_0 + \cdots + \delta_N + \cdots + \delta_k &= (\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \cdots + \varepsilon_k) \delta_0 \\ &\leq (\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{N+j}) \delta_0 \\ &\leq (\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_N}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_N \lambda_N} \right)^j \varepsilon_N) \delta_0 \\ &= (\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \frac{\frac{\lambda_N}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_N \lambda_N}}{1 - \frac{\lambda_N}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_N \lambda_N}} \varepsilon_N) \delta_0 \end{aligned}$$

wegen (3.10)

$$= (\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \frac{\lambda_N}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_N \lambda_N - \lambda_N} \varepsilon_N) \delta_0$$

$$\leq 2 \delta_0 \qquad \text{wegen (3.11)}$$

Damit ist auch der zweite Teil von (3.20) bewiesen.
Es wird nun gezeigt: Die Folge $\{x_n\}$ existiert und es gilt $x_n \in S_0 \forall n \in \mathbb{N}$. Hierfür genügt es durch vollständige Induktion nach n zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$(\text{Ind } 1)_n$ $x_{n+1} \in S_0$.

$(\text{Ind } 2)_n$ $F_n'^{-1}$ und $[I - \frac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F_n]^{-1}$ existieren und es gilt $\|F_n'^{-1}\| \leq \beta_n$.

$(\text{Ind } 3)_n$ $\|x_{n+1} - x_n\| = \|d_n\| \leq \delta_n$

$(\text{Ind } 4)_n$ $\tilde{\mu}_n = \beta_n K_2 \delta_n$, $\nu_n = \beta_n K_3 \delta_n^2$

mit $F_n := F(x_n)$, $F_n' := F'(x_n)$, $F_n'^{-1} := [F'(x_n)]^{-1}$, $F_n'' := F''(x_n)$, $d_n := x_{n+1} - x_n$.

Die Induktionsverankerung ergibt sich unmittelbar aus den Voraussetzungen des Satzes. Schluß von n auf n+1:

Wegen $(\text{Ind } 1)_n$ gilt $x_{n+1} \in S_0$. Es wird nun der Hilfsoperator $H_n(x)$ definiert durch

$$H_n(x) := [I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n''(x - x_n)] F_n'^{-1} F(x) \tag{3.21}$$

Dann gilt nach den vorausgesetzten Differenzierbarkeitseigenschaften von F und den Regeln der Differentialrechnung in Banach-Räumen:

$$H_n'(x) = -\tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F(x) + [I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n''(x - x_n)] F_n'^{-1} F'(x) \tag{3.22}$$

$$H_n''(x) = -F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F'(x) + [I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n''(x - x_n)] F_n'^{-1} F''(x) \tag{3.23}$$

$$H_n'''(x) = -\tfrac{3}{2} F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F''(x) + [I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'''(x - x_n)] F_n'^{-1} F'''(x) \tag{3.24}$$

Also:

$$H_n(x_{n+1}) = [I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n''(x_{n+1} - x_n)] F_n'^{-1} F(x_{n+1}) \tag{3.25}$$

$$H_n(x_n) = F_n'^{-1} F_n \tag{3.26}$$

$$H_n'(x_n) = I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F_n \tag{3.27}$$

$$H_n''(x_n) = \Theta \tag{3.28}$$

Das Halley-Verfahren kann man unter Verwendung des Operators $H_n(x)$ also schreiben in der Form

$$x_{n+1} = x_n - [H_n'(x_n)]^{-1} H_n(x_n)$$

oder

$$H_n(x_n) + H_n'(x_n) d_n = \Theta$$

oder wegen (3.28):

$$H_n(x_n) + H_n'(x_n) d_n + \tfrac{1}{2} H_n''(x_n) d_n^{(2)} = \Theta \tag{3.29}$$

(Hierdurch hat man dann eine Darstellung des Halley-Verfahrens gewonnen, die in gewisser Weise der Taylorentwicklung eines Operators bis zum quadratischen Term entspricht.)

Somit folgt:

$$\|H_n(x_{n+1})\| = \|H_n(x_{n+1}) - H_n(x_n) - H_n'(x_n) d_n - \tfrac{1}{2} H_n''(x_n) d_n^{(2)}\| \tag{3.30}$$

wegen (3.29)

$$\leq \tfrac{1}{6} \delta_n^3 \sup_{t \in [0,1]} \|H_n'''(x_n + t[x_{n+1} - x_n])\|$$

wegen $(\text{Ind } 3)_n$

$$\leq \tfrac{1}{6} \delta_n^3 \{\tfrac{3}{2} \beta_n^2 K_2^2 + \beta_n K_3 + \tfrac{1}{2} \beta_n^2 K_2 K_3 \delta_n\}$$

nach (3.24) und $(\text{Ind } 2)_n$

$$= \tfrac{1}{6} \{\tfrac{3}{2} \tilde{\mu}_n^2 + \nu_n + \tfrac{1}{2} \tilde{\mu}_n \nu_n\} \delta_n$$

nach $(\text{Ind } 4)_n$

Wegen (3.6) und (3.15) gilt $\tilde{\mu}_n < 1$. Wegen $(\text{Ind } 2)_n$ - $(\text{Ind } 4)_n$ und dem Banach-Lemma (Satz I.1) existiert dann $[I - \frac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n]^{-1}$ und es gilt:

$$\|[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_n} \tag{3.31}$$

Man hat nun

$$(3.32)\qquad \|F_n'^{-1}F_{n+1}\| = \|[I - \tfrac{1}{2}F_n'^{-1}F_n''d_n]^{-1}H_n(x_{n+1})\| \qquad \text{wegen (3.25)}$$
$$\leq \|[I - \tfrac{1}{2}F_n'^{-1}F_n''d_n]^{-1}\|\,\|H_n(x_{n+1})\|$$
$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n}\,\frac{1}{6}\{\tfrac{3}{2}\tilde{\mu}_n^2 + \nu_n + \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n\nu_n\}\,\delta_n$$
$$\text{wegen (3.30), (3.31)}$$

Wegen $\|F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']\| \leq \beta_n K_2 \delta_n = \tilde{\mu}_n < 1$ nach $(\text{Ind } 2)_n$, $(\text{Ind } 4)_n$ sowie (3.6) und (3.15) existiert nach dem Banach-Lemma (Satz I.1)

$$(3.33)\qquad [I - F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']]^{-1}F_n'^{-1} = F_{n+1}'^{-1}$$

mit $$\|F_{n+1}'^{-1}\| \leq \frac{\beta_n}{1 - \tilde{\mu}_n}$$

Ebenso folgt die Existenz von

$$[I - F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']]^{-1} = [F_n'^{-1}F_{n+1}']^{-1}$$

mit

$$(3.34)\qquad \|[F_n'^{-1}F_{n+1}']^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tilde{\mu}_n}$$

Also:

$$(3.35)\qquad \|F_{n+1}'^{-1}F_{n+1}\| = \|[F_n'^{-1}F_{n+1}']^{-1}F_n'^{-1}F_{n+1}\|$$
$$\leq \|[F_n'^{-1}F_{n+1}']^{-1}\|\,\|F_n'^{-1}F_{n+1}\|$$
$$\leq \frac{1}{1 - \tilde{\mu}_n}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n}\,\frac{1}{6}\{\tfrac{3}{2}\tilde{\mu}_n^2 + \nu_n + \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n\nu_n\}\,\delta_n$$
$$\text{wegen (3.32), (3.34)}$$

Somit

$$(3.36)\qquad \|\tfrac{1}{2}F_{n+1}'^{-1}F_{n+1}''F_{n+1}'^{-1}F_{n+1}\| \leq \frac{\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\frac{1}{6}\{\frac{3}{2}\tilde{\mu}_n^2 + \nu_n + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\nu_n\}}{(1 - \tilde{\mu}_n)(1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n)}$$
$$\text{nach } (\text{Ind } 4)_n,\ (3.35)$$
$$= \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n\delta_n$$
$$< 1 \qquad \text{nach (3.6) sowie (3.15), (3.17)}$$

Nach dem Banach-Lemma (Satz I.1) existiert also $[I - \frac{1}{2}F_{n+1}'^{-1}F_{n+1}''F_{n+1}'^{-1} * F_{n+1}]^{-1}$. Zusammen mit (3.33) folgt hieraus $(\text{Ind } 2)_{n+1}$. Außerdem hat man sofort die Abschätzung

$$(3.37)\qquad \|d_{n+1}\| = \|x_{n+2} - x_{n+1}\|$$
$$\leq \frac{\|F_{n+1}'^{-1}F_{n+1}\|}{1 - \|\frac{1}{2}F_{n+1}'^{-1}F_{n+1}''F_{n+1}'^{-1}F_{n+1}\|}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{6}\left\{\frac{3}{2}\tilde{\mu}_n^2 + \nu_n + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\nu_n\right\}}{(1-\tilde{\mu}_n)(1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n)} \Big/ 1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n \frac{\frac{1}{6}\left\{\frac{3}{2}\tilde{\mu}_n^2 + \nu_n + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\nu_n\right\}}{(1-\tilde{\mu}_n)(1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n)} \delta_n$$

wegen (3.35), (3.36)

$$= \frac{\lambda_n}{1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\lambda_n}\delta_n \qquad \text{wegen (3.1)}$$

$$= \frac{\lambda_n}{1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\lambda_n}\varepsilon_n\delta_0 \qquad \text{wegen (3.2)}$$

$$= \varepsilon_{n+1}\delta_0 \qquad \text{wegen (3.5)}$$

$$= \delta_{n+1}$$

Damit ist $(\text{Ind } 3)_{n+1}$ bewiesen. Es gilt nun

$$(3.38)\quad \|x_{n+2} - x_0\| \leq \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \cdots + \|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \delta_{n+1} + \cdots + \delta_0 \qquad \text{nach (3.37) und } (\text{Ind } 3)_k \text{ für } k = 0,\ldots,n$$

$$\leq 2\delta_0 \qquad \text{wegen (3.20)}$$

Damit ist $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ bewiesen. Schließlich hat man noch

$$\mu_{n+1} = \frac{\tilde{\mu}_n\lambda_n}{(1-\tilde{\mu}_n)(1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\lambda_n)}$$

$$= \frac{\beta_n}{1-\tilde{\mu}_n} K_2 \frac{\lambda_n\delta_n}{1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\lambda_n}$$

$$= \frac{\beta_n}{1-\tilde{\mu}_n} K_2 \frac{\lambda_n\varepsilon_n}{1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\lambda_n}\delta_0$$

$$= \beta_{n+1} K_2 \varepsilon_{n+1}\delta_0$$

$$= \beta_{n+1} K_2 \delta_{n+1} \qquad \text{nach (3.2), (3.3), (3.5) und } (\text{Ind } 4)_n$$

$$\nu_{n+1} = \frac{\nu_n\lambda_n^2}{(1-\tilde{\mu}_n)(1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\lambda_n)^2}$$

$$= \frac{\beta_n}{1-\tilde{\mu}_n} K_3 \left(\frac{\lambda_n\delta_n}{1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\lambda_n}\right)^2$$

$$= \beta_{n+1} K_3 \left(\frac{\lambda_n\varepsilon_n}{1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n\lambda_n}\right)^2 \delta_0^2$$

$$= \beta_{n+1} K_3 \varepsilon_{n+1}^2 \delta_o^2$$

$$= \beta_{n+1} K_3 \delta_{n+1}^2 \qquad \text{nach (3.2), (3.4) und (Ind 4)}_n$$

Damit ist $(\text{Ind } 4)_{n+1}$ bewiesen. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.
Wegen $\| x_{\kappa+1} - x_\kappa \| = \| d_\kappa \| \le \delta_\kappa$ nach $(\text{Ind } 3)_\kappa$ und wegen $\sum_{\kappa=0}^{\infty} \delta_\kappa \le 2\,\delta_o$ nach (3.30) bilden die $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, S_o abgeschlossen und $x_n \in S_o \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt, gibt es ein $x^* \in S_o$ mit $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Damit ist (3.12) bewiesen. Weiter ist:

$$F_n + F_n' d_n + \tfrac{1}{2} F_n''(-F_n'^{-1} F_n,\, d_n) = \Theta$$

oder

$$F_n + F_n' d_n + \tfrac{1}{2} F_n'' d_n^{(2)} + \tfrac{1}{2} F_n''(-F_n'^{-1} F_n - d_n ,\, d_n) = \Theta$$

Also

$$\begin{aligned}
(3.39)\quad \| F_{n+1} \| &\le \| F_{n+1} - F_n - F_n' d_n - \tfrac{1}{2} F_n'' d_n^{(2)} \| + \| \tfrac{1}{2} F_n''(-F_n' F_n - d_n ,\, d_n) \| \\
&\le \tfrac{1}{6} K_3 \| d_n \|^3 + \tfrac{1}{2} K_2 \| d_n \| \, \| F_n'^{-1} F_n + d_n \| \\
&\le \tfrac{1}{6} K_3 \| d_n \|^3 + \tfrac{1}{2} K_2 \| d_n \| (\| F_n'^{-1} F_n \| + \| d_n \|) \\
&= \tfrac{1}{6} K_3 \delta_n^3 + \tfrac{1}{2} K_2 \delta_n \, (\| F_n'^{-1} F_n \| + \delta_n)
\end{aligned}$$

Aus (3.20) erhält man die Konvergenz der Reihe $\sum_{\kappa=0}^{\infty} \delta_\kappa$. Es gilt also $\delta_n \to 0$ für $n \to \infty$. Aus (3.35) entnimmt man $\| F_n'^{-1} F_n \| \to 0$ für $n \to \infty$, da $\delta_n \to 0$ für $n \to \infty$ und da die $\tilde{\mu}_n$, ν_n für genügend großes n monoton fallen. Somit folgt aus (3.39) aber $\| F_{n+1} \| \to 0$. Wegen der Stetigkeit von F und der Stetigkeit der Norm folgt hieraus

$$F(x^*) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \Theta$$

Damit ist (3.13) bewiesen. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bevor die Voraussetzungen des Satzes in Zahlen spezifiziert werden, soll die Idee der retardierten Induktion an diesem Satz noch einmal exemplarisch erläutert werden. Wählt man in den Voraussetzungen N = 0, so verläuft der Beweis nach der für derartige Sätze üblichen Art der vollständigen Induktion. Für diesen Fall kann man die Voraussetzungen (3.1) - (3.11) dann in naheliegender Weise zusammenfassen: Es sind wieder $\tilde{\mu}_o$, ν_o, δ_o und $\varepsilon_o := 1$ gegeben. (3.1) geht über in

$$(a) \qquad \alpha_o := \frac{\tfrac{1}{6} \{ \tfrac{3}{2} \tilde{\mu}_o^2 + \nu_o + \tfrac{1}{2} \tilde{\mu}_o \nu_o \}}{(1 - \tilde{\mu}_o)(1 - \tfrac{1}{2} \tilde{\mu}_o)}$$

(3.2) geht in die triviale Identität $\delta_o = \delta_o$ über, da $\varepsilon_o := 1$ gilt. Aus (3.3) und (3.8) folgt

$$(b) \qquad (\tilde{\mu}_1 :=) \quad \frac{\tilde{\mu}_o \alpha_o}{(1 - \tilde{\mu}_o)(1 - \tfrac{1}{2} \tilde{\mu}_o \alpha_o)} \le \tilde{\mu}_o$$

Aus (3.4) und (3.9) folgt

$$(c) \qquad (\nu_1 :=) \quad \frac{\nu_o \alpha_o^2}{(1 - \tilde{\mu}_o)(1 - \tfrac{1}{2} \tilde{\mu}_o \alpha_o)^2} \le \nu_o$$

Die Folge der ε_n braucht hier nicht weiter berücksichtigt zu werden,

da in allen Beziehungen nur das $\varepsilon_0 := 1$ auftritt. Man erhält also noch aus (3.6)

(d) $$\tfrac{1}{2}\,\tilde{\mu}_0\,\lambda_0 < 1 \quad , \qquad \tilde{\mu}_0 < 1$$

und aus (3.10) und (3.11)

(e) $$\frac{\lambda_0}{1 - \tfrac{1}{2}\,\tilde{\mu}_0\,\lambda_0} < 1$$

(f) $$1 + \frac{\lambda_0}{1 - \tfrac{1}{2}\,\tilde{\mu}_0\,\lambda_0 - \lambda_0} \leq 2$$

Die Voraussetzungen (a) - (f) mögen nun im Vergleich zu den in der Literatur üblichen Voraussetzungen immer noch sehr kompliziert erscheinen. Das liegt daran, daß von den meisten Autoren derartige Sätze nur für eine fest vorgegebene Kombination von $\tilde{\mu}_0$- und ν_0-Werten bewiesen werden, wobei dann die Gültigkeit von (a) - (f) für diese $\tilde{\mu}_0$- ν_0-Kombination im Beweis gezeigt wird, statt dies vorauszusetzen. So könnte man auch hier die Voraussetzungen weiter spezifizieren zu

(g) $$\tilde{\mu}_0 \leq \tfrac{1}{2} \quad , \qquad \nu_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

Daß dann (a) - (f) gilt, könnte man im Beweis zeigen. Unter diesen Umständen würde der Induktionsbeweis dann sogar in die allgemein bekannte Form übergehen

$$\tilde{\mu}_0 \leq \tfrac{1}{2} \quad , \quad \nu_0 \leq \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mu}_n \leq \tfrac{1}{2} \quad , \quad \nu_n \leq \tfrac{1}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

(Diese Beweisform entspricht dann der von Satz I.2 (über das Newton-Verfahren), wo aus $\tilde{\mu}_0 \leq \tfrac{1}{2}$ induktiv gefolgert wird $\tilde{\mu}_1 \leq \tfrac{1}{2}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.) Nun rechnet man hier leicht nach:

$$\tilde{\mu}_0 \leq \tfrac{1}{2} \quad , \quad \nu_0 \leq \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 \leq \tfrac{4}{9} \quad , \quad \tilde{\mu}_1 \leq \tfrac{1}{2} \quad , \quad \nu_1 \leq \tfrac{1}{4} \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\tilde{\mu}_0\,\lambda_0 \leq \tfrac{1}{9} < 1 \quad , \quad \tilde{\mu}_0 \leq \tfrac{1}{2} < 1$$

$$\frac{\lambda_0}{1 - \tfrac{1}{2}\,\tilde{\mu}_0\,\lambda_0} \leq \tfrac{1}{2} < 1 \quad , \quad 1 + \frac{\lambda_0}{1 - \tfrac{1}{2}\,\tilde{\mu}_0\,\lambda_0 - \lambda_0} \leq 1 + 1 \leq 2$$

Für $\tilde{\mu}_0 \leq \tfrac{1}{2}$, $\nu_0 \leq \tfrac{1}{2}$ läßt sich also der Induktionsbeweis nach der "klassischen" Methode leicht führen, da sich λ_1, $\tilde{\mu}_1$, ν_1 usw. in gleicher Weise aus $\tilde{\mu}_1$, ν_1 berechnen lassen wie λ_0, $\tilde{\mu}_1$, ν_1 aus $\tilde{\mu}_0$, ν_0 usw.. Nun muß man allerdings bedenken, daß durch die Abschätzung

$$\nu_1 \leq \tfrac{1}{4} \leq \tfrac{1}{2}$$

praktisch die halbe Genauigkeit in der Abschätzung verlorengeht. Für den Induktionsbeweis benötigt man nämlich nur $\nu_1 \leq \tfrac{1}{2}$. Tatsächlich hat man aber $\nu_1 \leq \tfrac{1}{4}$. Es liegt daher nahe, den ν_0-Wert etwas größer zu wählen, da ja der ν_1-Wert durchaus noch etwas wachsen kann. Sobald man aber ν_0 etwas größer als $\tfrac{1}{2}$ wählt, kann man nicht mehr $\tilde{\mu}_1 \leq \tfrac{1}{2}$ folgern, d.h. der Induktionsbeweis ist nicht mehr möglich. Man kann sich nun aber überlegen: Ist $\tilde{\mu}_0 < \tfrac{1}{2}$ und wählt man ν_0 etwas größer als $\tfrac{1}{2}$, z.B. $\nu_0 = 0.52$, so ist $\tilde{\mu}_1$ etwas größer als $\tfrac{1}{2}$. (Der Induktionsbeweis ist also nicht möglich). Da aber $\nu_0 \leq \tfrac{1}{2}$, $\tilde{\mu}_0 \leq \tfrac{1}{2} \Rightarrow \nu_1 \leq \tfrac{1}{4}$, kann man auch für $\nu_0 = 0.52$ erwarten, daß ν_1 sicher noch kleiner als $\tfrac{1}{2}$ ist.

(weiter Seite 97)

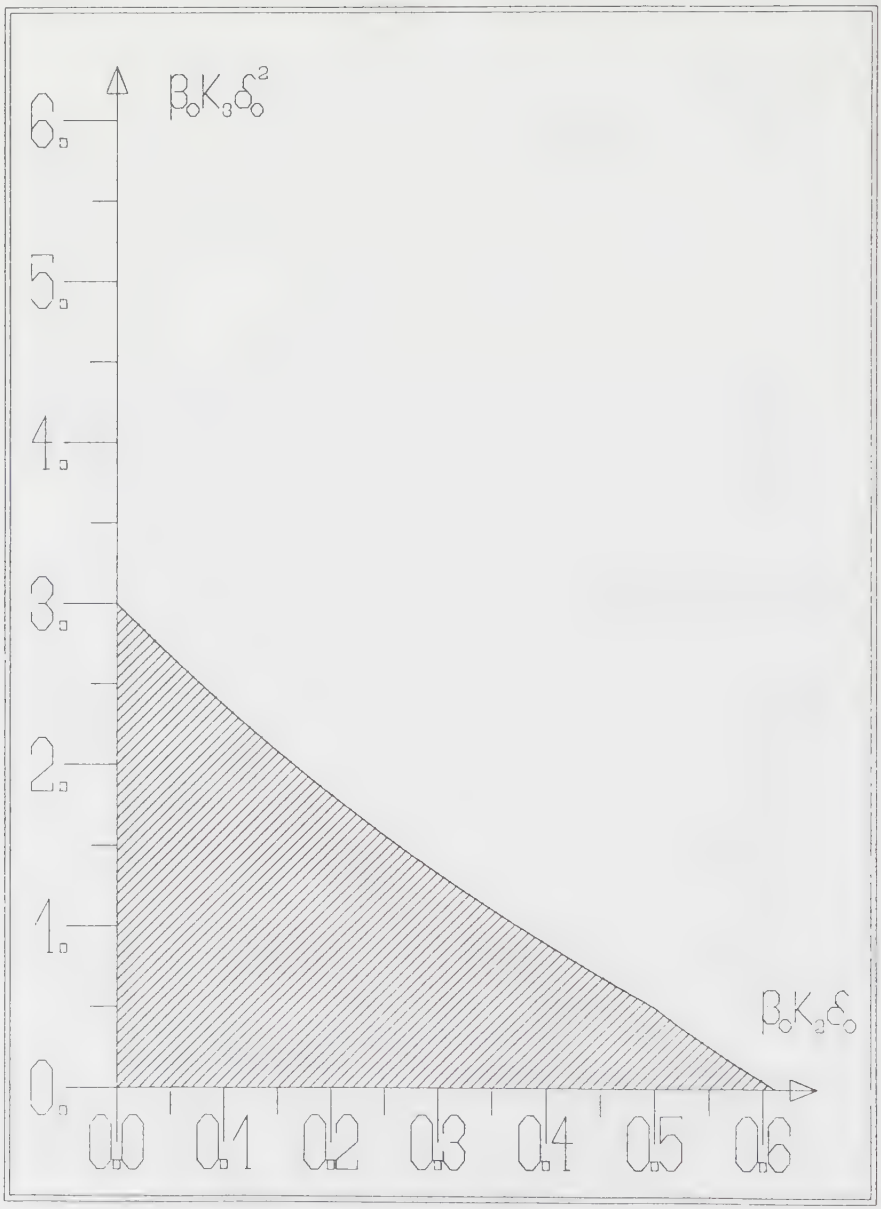


Abbildung III/1

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_o := \beta_o K_2 \delta_o$ und $\nu_o := \beta_o K_3 \delta_o^2$, für die Satz III.1 für $N = 0$ die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_o$ und ν_o ist schraffiert.

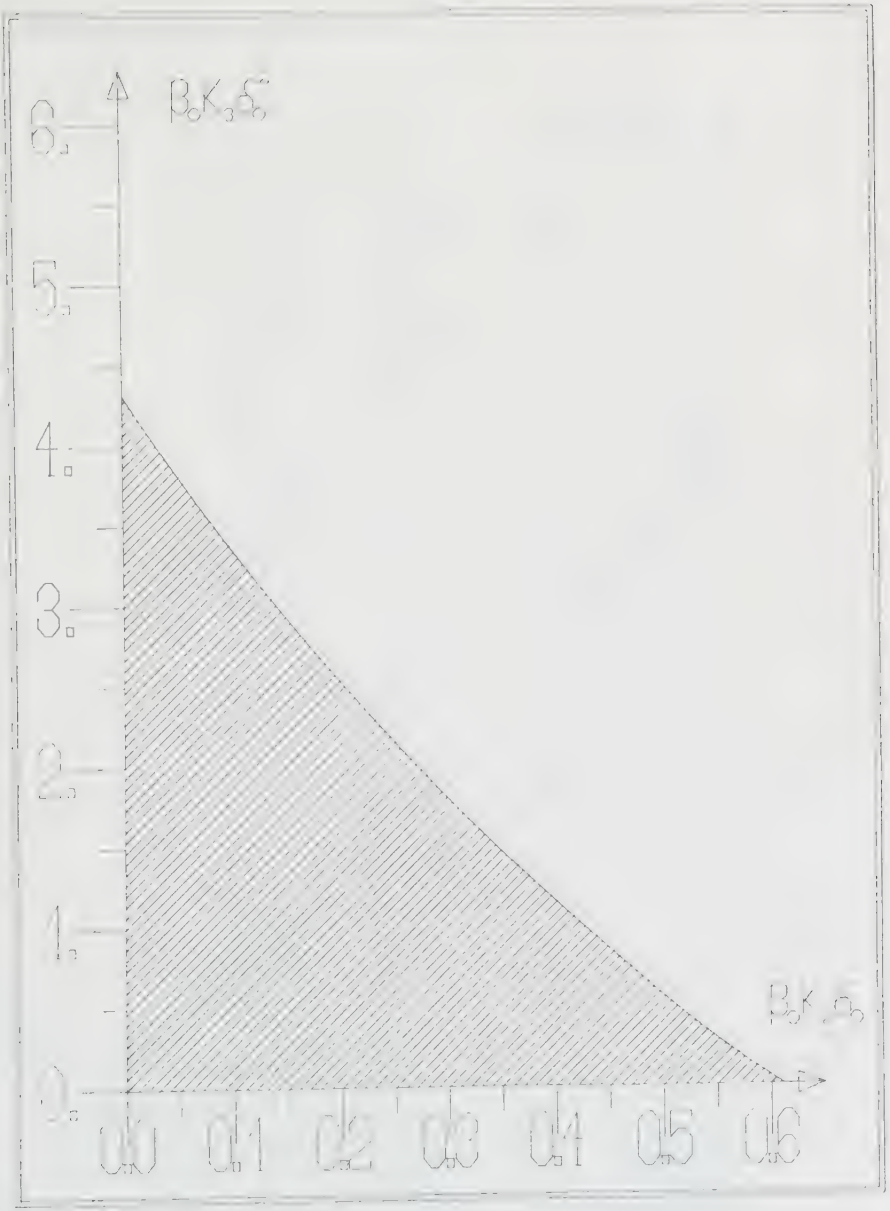


Abbildung III/2

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_1 \delta_0$ und $\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$, für die Satz III.2 für N = 10 die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0$ und ν_0 ist schraffiert.

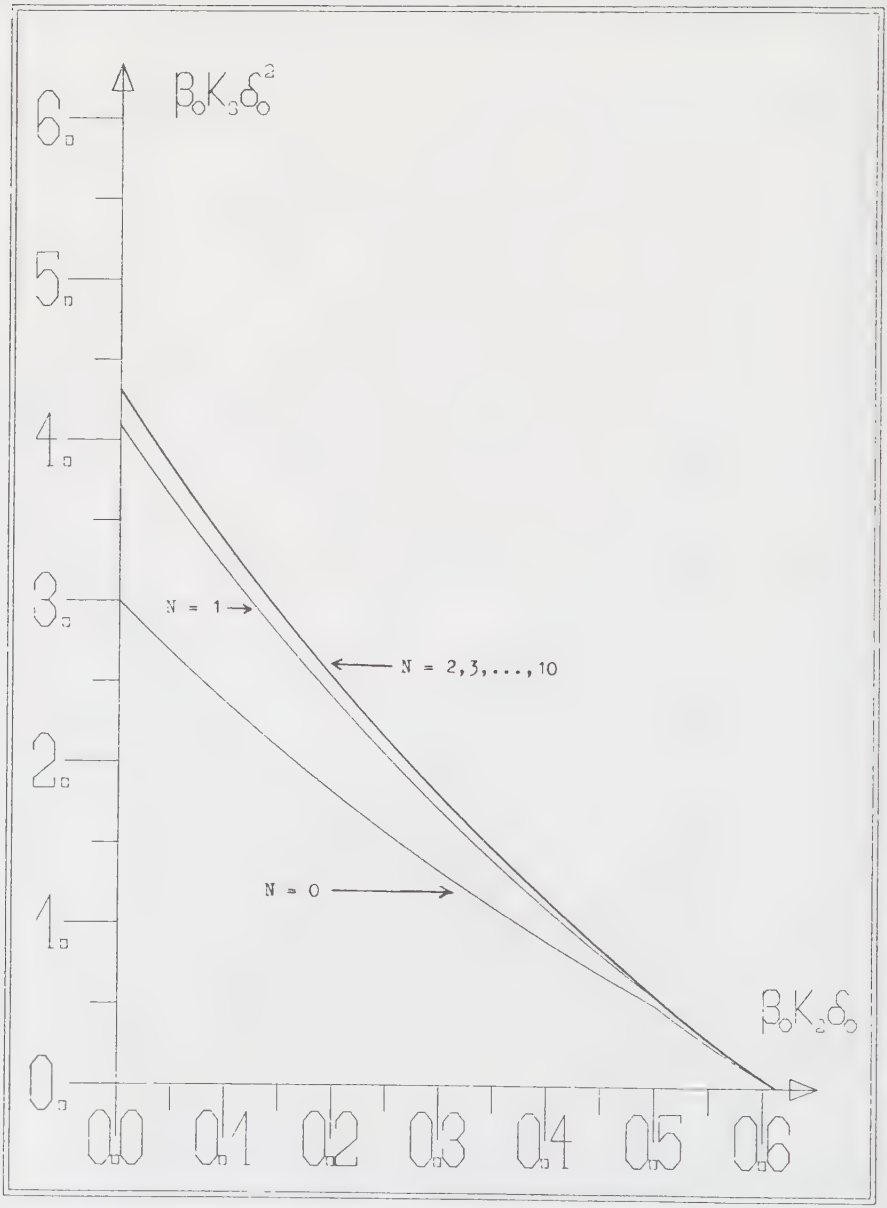


Abbildung III/3

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0$ und $\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$, für die Satz III.1 für verschiedene Werte von N die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0$ und ν_0 liegt zwischen den jeweiligen Kurven und den Koordinatenachsen.

Tabelle III/1

$\tilde{\mu}_o$	ν_o	$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.0	4.31406	0.052	3.79759
0.001	4.30374	0.053	3.78804
0.002	4.29345	0.054	3.77851
0.003	4.28317	0.055	3.76899
0.004	4.27290	0.056	3.75948
0.005	4.26265	0.057	3.74998
0.006	4.25241	0.058	3.74050
0.007	4.24219	0.059	3.73104
0.008	4.23199	0.060	3.72159
0.009	4.22180	0.061	3.71215
0.010	4.21162	0.062	3.70272
0.011	4.20146	0.063	3.69331
0.012	4.19132	0.064	3.68391
0.013	4.18119	0.065	3.67453
0.014	4.17108	0.066	3.66516
0.015	4.16098	0.067	3.65580
0.016	4.15089	0.068	3.64646
0.017	4.14082	0.069	3.63713
0.018	4.13077	0.070	3.62782
0.019	4.12073	0.071	3.61851
0.020	4.11070	0.072	3.60923
0.021	4.10069	0.073	3.59995
0.022	4.09070	0.074	3.59069
0.023	4.08072	0.075	3.58144
0.024	4.07075	0.076	3.57221
0.025	4.06080	0.077	3.56298
0.026	4.05086	0.078	3.55378
0.027	4.04094	0.079	3.54458
0.028	4.03104	0.080	3.53540
0.029	4.02114	0.081	3.52623
0.030	4.01127	0.082	3.51708
0.031	4.00140	0.083	3.50794
0.032	3.99155	0.084	3.49881
0.033	3.98172	0.085	3.48969
0.034	3.97190	0.086	3.48059
0.035	3.96209	0.087	3.47150
0.036	3.95230	0.088	3.46242
0.037	3.94253	0.089	3.45336
0.038	3.93276	0.090	3.44431
0.039	3.92302	0.091	3.43527
0.040	3.91328	0.092	3.42625
0.041	3.90356	0.093	3.41724
0.042	3.89386	0.094	3.40824
0.043	3.88417	0.095	3.39926
0.044	3.87449	0.096	3.39029
0.045	3.86483	0.097	3.38133
0.046	3.85518	0.098	3.37238
0.047	3.84555	0.099	3.36345
0.048	3.83593	0.100	3.35453
0.049	3.82632	0.101	3.34562
0.050	3.81673	0.102	3.33672
0.051	3.80716	0.103	3.32784

Tabelle III/1

$\tilde{\mu}_o$	ν_o	$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.104	3.31897	0.156	2.87467
0.105	3.31011	0.157	2.86644
0.106	3.30127	0.158	2.85823
0.107	3.29244	0.159	2.85002
0.108	3.28362	0.160	2.84182
0.109	3.27481	0.161	2.83364
0.110	3.26602	0.162	2.82547
0.111	3.25724	0.163	2.81730
0.112	3.24847	0.164	2.80915
0.113	3.23971	0.165	2.80102
0.114	3.23097	0.166	2.79289
0.115	3.22224	0.167	2.78477
0.116	3.21352	0.168	2.77667
0.117	3.20481	0.169	2.76857
0.118	3.19612	0.170	2.76049
0.119	3.18743	0.171	2.75242
0.120	3.17877	0.172	2.74436
0.121	3.17011	0.173	2.73631
0.122	3.16146	0.174	2.72827
0.123	3.15283	0.175	2.72024
0.124	3.14421	0.176	2.71222
0.125	3.13560	0.177	2.70422
0.126	3.12701	0.178	2.69622
0.127	3.11842	0.179	2.68824
0.128	3.10985	0.180	2.68027
0.129	3.10129	0.181	2.67231
0.130	3.09274	0.182	2.66436
0.131	3.08421	0.183	2.65642
0.132	3.07568	0.184	2.64849
0.133	3.06717	0.185	2.64057
0.134	3.05867	0.186	2.63266
0.135	3.05019	0.187	2.62477
0.136	3.04171	0.188	2.61688
0.137	3.03325	0.189	2.60900
0.138	3.02480	0.190	2.60114
0.139	3.01636	0.191	2.59329
0.140	3.00793	0.192	2.58544
0.141	2.99951	0.193	2.57761
0.142	2.99111	0.194	2.56979
0.143	2.98271	0.195	2.56198
0.144	2.97433	0.196	2.55418
0.145	2.96596	0.197	2.54639
0.146	2.95761	0.198	2.53861
0.147	2.94926	0.199	2.53084
0.148	2.94093	0.200	2.52308
0.149	2.93261	0.201	2.51533
0.150	2.92430	0.202	2.50760
0.151	2.91600	0.203	2.49987
0.152	2.90771	0.204	2.49215
0.153	2.89943	0.205	2.48445
0.154	2.89117	0.206	2.47675
0.155	2.88292	0.207	2.46906

Tabelle III/1

$\tilde{\mu}_o$	ν_o	$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.209	2.46139	0.260	2.07593
0.209	2.45372	0.261	2.06877
0.210	2.44607	0.262	2.06162
0.211	2.43842	0.263	2.05447
0.212	2.43079	0.264	2.04734
0.213	2.42317	0.265	2.04022
0.214	2.41555	0.266	2.03310
0.215	2.40795	0.267	2.02600
0.216	2.40035	0.268	2.01890
0.217	2.39277	0.269	2.01181
0.218	2.38520	0.270	2.00473
0.219	2.37763	0.271	1.99766
0.220	2.37009	0.272	1.99060
0.221	2.36254	0.273	1.98354
0.222	2.35500	0.274	1.97650
0.223	2.34748	0.275	1.96946
0.224	2.33997	0.276	1.96244
0.225	2.33246	0.277	1.95542
0.226	2.32497	0.278	1.94841
0.227	2.31749	0.279	1.94141
0.228	2.31001	0.280	1.93442
0.229	2.30255	0.281	1.92744
0.230	2.29510	0.282	1.92046
0.231	2.28765	0.283	1.91350
0.232	2.28022	0.284	1.90654
0.233	2.27279	0.285	1.89959
0.234	2.26538	0.286	1.89265
0.235	2.25797	0.287	1.88572
0.236	2.25058	0.288	1.87880
0.237	2.24319	0.289	1.87188
0.238	2.23581	0.290	1.86498
0.239	2.22845	0.291	1.85808
0.240	2.22109	0.292	1.85119
0.241	2.21374	0.293	1.84431
0.242	2.20640	0.294	1.83743
0.243	2.19908	0.295	1.83057
0.244	2.19176	0.296	1.82371
0.245	2.18445	0.297	1.81687
0.246	2.17715	0.298	1.81003
0.247	2.16986	0.299	1.80320
0.248	2.16258	0.300	1.79638
0.249	2.15530	0.301	1.78956
0.250	2.14804	0.302	1.78275
0.251	2.14079	0.303	1.77596
0.252	2.13355	0.304	1.76916
0.253	2.12631	0.305	1.76238
0.254	2.11909	0.306	1.75561
0.255	2.11187	0.307	1.74884
0.256	2.10466	0.308	1.74209
0.257	2.09747	0.309	1.73533
0.258	2.09028	0.310	1.72859
0.259	2.08310	0.311	1.72186

Tabelle III/1

$\tilde{\mu}_o$	ν_o	$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.312	1.71513	0.364	1.37566
0.313	1.70841	0.365	1.36932
0.314	1.70170	0.366	1.36299
0.315	1.69500	0.367	1.35666
0.316	1.68831	0.368	1.35033
0.317	1.68162	0.369	1.34401
0.318	1.67494	0.370	1.33770
0.319	1.66827	0.371	1.33140
0.320	1.66161	0.372	1.32510
0.321	1.65495	0.373	1.31881
0.322	1.64830	0.374	1.31252
0.323	1.64166	0.375	1.30624
0.324	1.63503	0.376	1.29997
0.325	1.62840	0.377	1.29370
0.326	1.62179	0.378	1.28744
0.327	1.61518	0.379	1.28119
0.328	1.60857	0.380	1.27494
0.329	1.60198	0.381	1.26870
0.330	1.59539	0.382	1.26246
0.331	1.58881	0.383	1.25623
0.332	1.58224	0.384	1.25001
0.333	1.57567	0.385	1.24379
0.334	1.56911	0.386	1.23758
0.335	1.56256	0.387	1.23137
0.336	1.55602	0.388	1.22517
0.337	1.54948	0.389	1.21897
0.338	1.54295	0.390	1.21279
0.339	1.53643	0.391	1.20660
0.340	1.52992	0.392	1.20043
0.341	1.52341	0.393	1.19425
0.342	1.51691	0.394	1.18809
0.343	1.51042	0.395	1.18193
0.344	1.50393	0.396	1.17577
0.345	1.49745	0.397	1.16962
0.346	1.49098	0.398	1.16348
0.347	1.48452	0.399	1.15734
0.348	1.47806	0.400	1.15121
0.349	1.47161	0.401	1.14508
0.350	1.46516	0.402	1.13896
0.351	1.45873	0.403	1.13285
0.352	1.45230	0.404	1.12673
0.353	1.44587	0.405	1.12063
0.354	1.43946	0.406	1.11453
0.355	1.43305	0.407	1.10844
0.356	1.42665	0.408	1.10235
0.357	1.42025	0.409	1.09626
0.358	1.41386	0.410	1.09018
0.359	1.40748	0.411	1.08411
0.360	1.40110	0.412	1.07804
0.361	1.39473	0.413	1.07198
0.362	1.38837	0.414	1.06592
0.363	1.38201	0.415	1.05987

Tabelle III/1

$\tilde{\mu}_o$	ν_o	$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.416	1.05382	0.468	0.74526
0.417	1.04778	0.469	0.73942
0.418	1.04174	0.470	0.73357
0.419	1.03571	0.471	0.72773
0.420	1.02968	0.472	0.72190
0.421	1.02365	0.473	0.71606
0.422	1.01764	0.474	0.71023
0.423	1.01162	0.475	0.70440
0.424	1.00561	0.476	0.69857
0.425	0.99961	0.477	0.69274
0.426	0.99361	0.478	0.68692
0.427	0.98762	0.479	0.68110
0.428	0.98163	0.480	0.67528
0.429	0.97564	0.481	0.66946
0.430	0.96966	0.482	0.66365
0.431	0.96368	0.483	0.65784
0.432	0.95771	0.484	0.65203
0.433	0.95175	0.485	0.64622
0.434	0.94578	0.486	0.64041
0.435	0.93982	0.487	0.63461
0.436	0.93387	0.488	0.62880
0.437	0.92792	0.489	0.62300
0.438	0.92197	0.490	0.61720
0.439	0.91603	0.491	0.61140
0.440	0.91010	0.492	0.60561
0.441	0.90416	0.493	0.59981
0.442	0.89823	0.494	0.59402
0.443	0.89231	0.495	0.58823
0.444	0.88639	0.496	0.58244
0.445	0.88047	0.497	0.57665
0.446	0.87455	0.498	0.57087
0.447	0.86864	0.499	0.56509
0.448	0.86274	0.500	0.55931
0.449	0.85683	0.501	0.55354
0.450	0.85093	0.502	0.54778
0.451	0.84504	0.503	0.54204
0.452	0.83915	0.504	0.53632
0.453	0.83326	0.505	0.53061
0.454	0.82737	0.506	0.52491
0.455	0.82149	0.507	0.51923
0.456	0.81561	0.508	0.51356
0.457	0.80973	0.509	0.50790
0.458	0.80385	0.510	0.50226
0.459	0.79798	0.511	0.49664
0.460	0.79211	0.512	0.49102
0.461	0.78625	0.513	0.48543
0.462	0.78039	0.514	0.47984
0.463	0.77453	0.515	0.47427
0.464	0.76867	0.516	0.46872
0.465	0.76281	0.517	0.46318
0.466	0.75696	0.518	0.45765
0.467	0.75111	0.519	0.45214

Tabelle III/1

$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.520	0.44664
0.521	0.44115
0.522	0.43568
0.523	0.43023
0.524	0.42478
0.525	0.41936
0.526	0.41394
0.527	0.40854
0.528	0.40315
0.529	0.39778
0.530	0.39242
0.531	0.38708
0.532	0.38175
0.533	0.37643
0.534	0.37112
0.535	0.36583
0.536	0.36056
0.537	0.35530
0.538	0.35005
0.539	0.34481
0.540	0.33959
0.541	0.33438
0.542	0.32919
0.543	0.32401
0.544	0.31885
0.545	0.31369
0.546	0.30855
0.547	0.30343
0.548	0.29831
0.549	0.29322
0.550	0.28813
0.551	0.28306
0.552	0.27800
0.553	0.27296
0.554	0.26793
0.555	0.26291
0.556	0.25791
0.557	0.25292
0.558	0.24794
0.559	0.24298
0.560	0.23803
0.561	0.23309
0.562	0.22817
0.563	0.22326
0.564	0.21836
0.565	0.21348
0.566	0.20861
0.567	0.20375
0.568	0.19891
0.569	0.19408
0.570	0.18926
0.571	0.18446
0.572	0.17967
0.573	0.17489
0.574	0.17013
0.575	0.16538
0.576	0.16064
0.577	0.15592
0.578	0.15121
0.579	0.14651
0.580	0.14183
0.581	0.13715
0.582	0.13249
0.583	0.12785
0.584	0.12322
0.585	0.11860
0.586	0.11399
0.587	0.10940
0.588	0.10482
0.589	0.10025
0.590	0.09570
0.591	0.09116
0.592	0.08663
0.593	0.08211
0.594	0.07761
0.595	0.07312
0.596	0.06864
0.597	0.06418
0.598	0.05973
0.599	0.05529
0.600	0.05086
0.601	0.04645
0.602	0.04205
0.603	0.03767
0.604	0.03329
0.605	0.02893
0.606	0.02458
0.607	0.02025
0.608	0.01592
0.609	0.01161
0.610	0.00731
0.611	0.00303

Wenn aber $\tilde{\mu}_1$ etwas größer als $\frac{1}{2}$ ist und ν_1 kleiner als $\frac{1}{2}$, so kann es sein, daß $\tilde{\mu}_2$ und ν_2 beide kleiner als $\frac{1}{2}$ sind. Dann könnte man aber den normalen Induktionsbeweis für $n \geq 2$ führen, während man alle für den Beweis notwendigen Bedingungen für $n = 0,1$ individuell überprüfen müßte. Gegebenenfalls kann man den Induktionsbeweis auch erst für $n \geq 3$ oder $n \geq 4$ führen. Diese Verzögerung im Beginn des Induktionsbeweises soll durch den Begriff "retardierte" Induktion ausgedrückt werden.

Zu den auf den ersten Blick recht komplizierten Voraussetzungen derartiger Sätze kann nur noch einmal das betont werden, was bereits in Kapitel II ausgeführt wurde: Die Überprüfung der Voraussetzungen eines Satzes wird in ihrer Schwierigkeit oder Leichtigkeit überwiegend bestimmt durch die in eben diesen Voraussetzungen enthaltenen Konvergenzgrößen, d.h. durch die allein auf das Problem bezogenen Daten. Im Falle von Satz III.1 sind dies lediglich β_0, K_2, K_3, δ_0. Dieser Satz verlangt also nicht mehr problembezogene Informationen als alle anderen aus der Literatur bekannten, vergleichbaren Sätze. Die zur Verfügung stehenden Daten werden allerdings in den Sätzen dieser Arbeit ganz besonders sorgfältig ausgewertet, um möglichst allgemeine und flexible Konvergenzaussagen zu erhalten. Diese Allgemeinheit der Konvergenzaussage ist natürlich nur möglich durch recht allgemeine Konvergenzbedingungen. Für den Anwender ergeben sich hieraus aber keinerlei Schwierigkeiten, da sich die Konvergenzbedingungen stets in der Form eines Funktionsunterprogrammes maschinell überprüfen lassen. Die Aussagen von Satz III.1 lassen sich - ebenso wie dies schon für die in Kapitel II angegebenen Sätze geschehen ist - in Form des folgenden Fortran-Programmes darstellen:

```
      LOGICAL FUNCTION KOVHD(MUEØ,NUEØ,N)
      REAL MUEØ,NUEØ,EPSØ,MUE1,NUE1,EPS1
      REAL LAM,SE,S,A,B,C
      INTEGER N,K
      EPSØ=1.Ø
      SE=Ø.Ø
      IF (MUEØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      IF (NUEØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      K=Ø
   1Ø CONTINUE
      IF (MUEØ.GE.1.Ø) GO TO 2Ø
      A=1.Ø-MUEØ
      B=1.Ø-Ø.5*MUEØ
      LAM=1.5*MUEØ*MUEØ+NUEØ+Ø.5*MUEØ*NUEØ
      LAM=LAM/(6.Ø*A*B)
      C=Ø.5*MUEØ*LAM
      IF (C.GE.1.Ø) GO TO 2Ø
      C=1.Ø-C
      MUE1=MUEØ*LAM/(A*C)
      NUE1=NUEØ*LAM*LAM/(A*C*C)
      EPS1=EPSØ*LAM/C
      SE=SE+EPSØ
      IF (SE.GT.2.Ø) GO TO 15
      IF (MUE1.GT.MUEØ) GO TO 15
      IF (NUE1.GT.NUEØ) GO TO 15
      C=L/C
      IF (C.GE.1.Ø) GO TO 15
      A=LAM/(1.Ø-Ø.5*MUEØ*LAM-LAM)
      S=SE+A*EPSØ
      IF (S.GT.2.Ø) GO TO 15
```

```
      KOVHD=.TRUE.
      RETURN
   15 K=K+1
      IF (K.GE.N+1) GO TO 2Ø
      MUEØ=MUE1
      NUEØ=NUE1
      EPSØ=EPS1
      GO TO 1Ø
   2Ø CONTINUE
      KOVHD=.FALSE.
      RETURN
      END
```

Die Funktion hat den Wert ".TRUE.", wenn die Konvergenz gesichert ist, anderenfalls hat sie den Wert ".FALSE.". Der Parameter N sollte vom Anwender stets N = 10 gewählt werden.

Unter Verwendung dieses Programmes lassen sich nun leicht die Voraussetzungen von Satz III.1 auswerten. Wenn man N = 0 wählt, d.h. wenn man den Beweis nach der Methode der "klassischen" Induktion führt, so erhält man den in Abbildung III/1 auf Seite 88 dargestellten Konvergenzbereich. Führt man statt dessen den Beweis nach der Methode der retardierten Induktion, so erhält man den in Abbildung III/2 auf Seite 89 dargestellten Konvergenzbereich. Ein Vergleich der beiden Abbildungen macht deutlich, daß bei sonst identischer Beweisidee, d.h. identischen Abschätzungen, allein durch die Modifikation der Induktionsmethode eine deutliche Vergrößerung des Konvergenzbereiches, d.h. eine Verschärfung der Aussagen des Satzes, erreicht werden kann. In Tabelle III/1 (Seite 91 - 96) sind diese verschärften Aussagen in Form einer Wertetafel angegeben, d.h. man kann dort für verschiedene $\tilde{\mu}_0$-Werte die ν_0-Werte ablesen, für die die Voraussetzungen von Satz III.1 noch erfüllt werden. Die Abbildung III/3 zeigt schließlich, wie sich der Konvergenzbereich von Satz III.1 in Abhängigkeit von der Wahl von N ändert, wobei N = 0 der "klassischen" Induktionsmethode entspricht. Man entnimmt dieser Abbildung insbesondere, daß sich für $N \geq 2$ schon keine wesentlichen Änderungen der Aussagen des Satzes mehr ergeben. Außerdem macht diese Abbildung nochmals deutlich, welche Verbesserungen allein durch die Methode der retardierten Induktion erzielt werden können.

Der Satz III.1 war in seinen Voraussetzungen gleich so formuliert worden, wie es für den Beweis mit Hilfe der Methode der retardierten Induktion notwendig war. Für die nachfolgende Erläuterung jener Überlegungen, die auf diese Methode geführt haben, wurden dann die Voraussetzungen des Satzes weiter spezialisiert und schließlich in die bei derartigen Sätzen bisher übliche Form überführt. Bei dem nächsten Satz über das Halley-Verfahren (Satz III.7) soll nun der umgekehrte Weg gegangen werden, d.h. dieser Satz wird in seinen Voraussetzungen zunächst die "klassische" Form zeigen und nach der bekannten Induktionsmethode bewiesen werden. Anschließend wird dann erläutert, wie man einen derartigen Satz in seinen Voraussetzungen umzuformen hat, um den Beweis durch retardierte Induktion führen zu können. Auch in diesem Falle wird sich hierdurch dann eine deutliche Verschärfung der Aussagen des Satzes erzielen lassen. Um die Übersichtlichkeit des Beweises von Satz III.7 nicht durch umfangreiche "Nebenrechnungen" zu stören, sollen vorab in den Sätzen III.2 bis III.6 einige einfache Beziehungen zusammengestellt werden.

Satz III.2: Die Funktion

$$f(\mu) := \min\left\{ \frac{1 - \frac{5}{2}\mu + \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu^3}{\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\mu + \frac{1}{8}\mu^2}, \frac{6 - 15\mu + \frac{21}{2}\mu^2 - \frac{15}{4}\mu^3}{1 - \frac{1}{4}\mu^2} \right\}$$

ist für $\mu \in [0, \frac{3}{5}]$ monoton fallend.

Beweis: Sei $\mu \in [0, \frac{3}{5}]$ und

$$f_1(\mu) := \frac{1 - \frac{5}{2}\mu + \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu^3}{\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\mu + \frac{1}{8}\mu^2} = \frac{3(1-\mu)^2}{1 - \frac{3}{4}\mu} - \frac{\frac{3}{2}\mu^2}{1 - \frac{1}{2}\mu}$$

$$f_2(\mu) := \frac{6 - 15\mu + \frac{21}{2}\mu^2 - \frac{15}{4}\mu^3}{1 - \frac{1}{4}\mu^2} = \frac{6(1-\mu)^2}{1 + \frac{1}{2}\mu} - \frac{\frac{3}{2}\mu^2}{1 - \frac{1}{2}\mu}$$

Dann gilt:

$$f_2(\mu) - f_1(\mu) = \frac{6(1-\mu)^2}{1 + \frac{1}{2}\mu} - \frac{3(1-\mu)^2}{1 - \frac{3}{4}\mu}$$

$$= \frac{(1-\mu)^2}{(1 + \frac{1}{2}\mu)(1 - \frac{3}{4}\mu)} [3 - 6\mu]$$

d.h.

$$f_2(\mu) - f_1(\mu) \begin{cases} > 0 & \text{für } \mu < \frac{1}{2} \\ = 0 & \text{für } \mu = \frac{1}{2} \\ < 0 & \text{für } \mu > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Es gilt also

$$f(\mu) = \begin{cases} f_1(\mu) & \text{für } \mu \in [0, \frac{1}{2}] \\ f_2(\mu) & \text{für } \mu \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{5}] \end{cases}$$

Es genügt nun zu zeigen:
$f_1(\mu)$ ist monoton fallend für $\mu \in [0, \frac{1}{2}]$
$f_2(\mu)$ ist monoton fallend für $\mu \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$
Hierfür genügt $f_1'(\mu) < 0$, $f_2'(\mu) < 0$. Nun ist:

$$f_1'(\mu) = \frac{\left[\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\mu + \frac{1}{8}\mu^2\right]\left[-\frac{5}{2} + 3\mu - \frac{3}{8}\mu^2\right]}{\left[\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\mu + \frac{1}{8}\mu^2\right]^2} -$$

$$- \frac{\left[1 - \frac{5}{2}\mu + \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu^3\right]\left[-\frac{5}{12} + \frac{1}{4}\mu\right]}{\left[\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\mu + \frac{1}{8}\mu^2\right]}$$

$$\left[\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\mu + \frac{1}{8}\mu^2\right]^2 f_1'(\mu) = -\frac{5}{12} + \frac{3}{4}\mu - \frac{7}{16}\mu^2 + \frac{10}{96}\mu^3 - \frac{1}{64}\mu^4$$

$$\leq -\frac{5}{12} + \frac{3}{4}\mu + \frac{10}{96}\mu^3 \quad \text{für } \mu \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

$$\leq -\frac{5}{12} + \frac{3}{8} + \frac{10}{768}$$

$$< 0$$

$$f_2'(\mu) = \frac{\left[1 - \frac{1}{4}\mu^2\right]\left[-15 + 21\mu - \frac{45}{4}\mu^2\right]}{\left[1 - \frac{1}{4}\mu^2\right]^2} - \frac{\left[6 - 15\mu + \frac{21}{2}\mu^2 - \frac{15}{4}\mu^3\right]\left[-\frac{1}{2}\mu\right]}{\left[1 - \frac{1}{4}\mu^2\right]^2}$$

$$\begin{aligned}\left[1 - \tfrac{1}{4}\mu^2\right]^2 f_2'(\mu) &= -15 + 24\mu - \tfrac{60}{4}\mu^2 + \tfrac{15}{16}\mu^4 \\ &< -15 + 24\cdot\tfrac{3}{5} - 15\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{15}{16}\cdot\left(\tfrac{3}{5}\right)^4 \quad \text{für } \mu\in\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{5}\right] \\ &< 0\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Satz III.3: Es sei $\mu\in[0,\frac{3}{5}]$ und

$$f(\mu) := \min\left\{\frac{1 - \frac{5}{2}\mu + \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu^3}{\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\mu + \frac{1}{8}\mu^2}, \frac{6 - 15\mu + \frac{21}{2}\mu^2 - \frac{15}{4}\mu^3}{1 - \frac{1}{4}\mu^2}\right\}$$

Ist $\nu_n \le f(\mu_n)$ und $\mu_{n+1} \le \mu_n$, $\nu_{n+1} \le \nu_n$, so gilt $\nu_{n+1} \le f(\mu_{n+1})$, sofern nur $\mu_n, \mu_{n+1}\in[0,\frac{3}{5}]$

Beweis: Nach Satz III.2 ist $f(\mu)$ auf $[0,\frac{3}{5}]$ monoton fallend, d.h.

$$\mu_{n+1} \le \mu_n \quad \Rightarrow \quad f(\mu_n) \le f(\mu_{n+1})$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

Satz III.4: Es gelte

$$0 \le \nu \le \min\left\{\frac{1 - \frac{5}{2}\mu + \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu^3}{\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\mu + \frac{1}{8}\mu^2}, \frac{6 - 15\mu + \frac{21}{2}\mu^2 - \frac{15}{4}\mu^3}{1 - \frac{1}{4}\mu^2}\right\}$$

wobei $\mu\in[0,\frac{3}{5}]$. Dann gilt:

$$\frac{\frac{1}{6}\nu}{1-\mu} + \frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)} \Big/ 1 - \frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}\left\{\frac{\frac{1}{6}\nu}{1-\mu} + \frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)}\right\} \le \frac{1}{2}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\nu &\le \frac{1 - \frac{5}{2}\mu + \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu^3}{\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\mu + \frac{1}{8}\mu^2} \\ &= 6(1-\mu)\left[\frac{\frac{1}{2}(1-\mu)}{1 - \frac{3}{4}\mu} - \frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)}\right]\end{aligned}$$

Wegen $\mu < 1$ gilt $1 - \mu > 0$ und somit

$$\frac{\frac{1}{6}\nu}{1-\mu} + \frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)} \leq \frac{\frac{1}{2}(1-\mu)}{1-\frac{3}{4}\mu}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}\frac{\mu}{1-\mu}}$$

oder wegen $\frac{\mu}{1-\mu} > 0$:

$$\underbrace{\frac{\mu}{1-\mu}\left\{\frac{\frac{1}{6}\nu}{1-\mu} + \frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)}\right\}}_{=:\alpha} \leq \frac{\frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}}{1+\frac{1}{4}\frac{\mu}{1-\mu}}$$

Also:

$$\alpha\left[1+\frac{1}{4}\frac{\mu}{1-\mu}\right] \leq \frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\alpha \leq \frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}\left[1-\frac{1}{2}\alpha\right]$$

Wegen $\mu \in [0, \frac{3}{5}]$ gilt $\frac{\mu}{1-\mu} \in [0, \frac{3}{2}]$. Somit: $\alpha \in [0, \frac{3}{4}]$. Also:

$$1-\frac{1}{2}\alpha > 0 \text{ , d.h. } \frac{\alpha}{1-\frac{1}{2}\alpha} \leq \frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}$$

oder wegen $1-\mu, \mu \geq 0$:

$$\frac{\frac{1-\mu}{\mu}\alpha}{1-\frac{1}{2}\alpha} \leq \frac{1}{2}$$

Das ist aber die Behauptung. ■

Satz III.5: Es gelte

$$0 \leq \nu \leq \min\left\{\frac{1-\frac{5}{2}\mu+\frac{3}{2}\mu^2-\frac{1}{8}\mu^3}{\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\mu+\frac{1}{8}\mu^2}, \frac{6-15\mu+\frac{21}{2}\mu^2-\frac{15}{4}\mu^3}{1-\frac{1}{4}\mu^2}\right\}$$

wobei $\mu \in [0, \frac{3}{5}]$. Dann gilt:

$$\frac{\frac{1}{2}\mu}{1-\mu}\left\{\frac{\frac{1}{6}\nu}{1-\mu}+\frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)}\right\}<\frac{1}{3}$$

Beweis: In Satz III.4 war bereits gezeigt worden:

Mit $\alpha := \frac{\mu}{1-\mu}\left\{\frac{\frac{1}{6}\nu}{1-\mu}+\frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)}\right\}$

gilt $\alpha\left[1+\frac{1}{4}\frac{\mu}{1-\mu}\right] \le \frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}$

Also: $\alpha \le \dfrac{\frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}}{1+\frac{1}{4}\frac{\mu}{1-\mu}} = \dfrac{\frac{1}{2}\mu}{1-\frac{3}{4}\mu}$

d.h. $\frac{1}{2}\alpha \le \dfrac{\frac{1}{4}\mu}{1-\frac{3}{4}\mu}$. Mit $\mu \le \frac{3}{5}$ folgt also $\frac{1}{2}\alpha \le \frac{3}{11} < \frac{1}{3}$ und das ist die Behauptung. ■

Satz III.6: Es gelte

$$0 \le \nu \le \min\left\{\frac{1-\frac{5}{2}\mu+\frac{3}{2}\mu^2-\frac{1}{8}\mu^3}{\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\mu+\frac{1}{8}\mu^2},\ \frac{6-15\mu+\frac{21}{2}\mu^2-\frac{15}{4}\mu^3}{1-\frac{1}{4}\mu^2}\right\}$$

wobei $\mu \in [0, \frac{3}{5}]$. Dann gilt:

$$\frac{\frac{\mu}{1-\mu}\left\{\frac{\frac{1}{6}\nu}{1-\mu}+\frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)}\right\}}{1-\frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}\left\{\frac{\frac{1}{6}\nu}{1-\mu}+\frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)}\right\}} \le \mu$$

Beweis: Es ist

$$\nu \le \frac{6-15\mu+\frac{21}{2}\mu^2-\frac{15}{4}\mu^3}{1-\frac{1}{4}\mu^2}$$

$$\Rightarrow 6(1-\mu)\ \frac{1-\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}-\frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)}$$

$$\frac{\frac{1}{6}\nu}{1-\mu}+\frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)} \le \frac{1-\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}$$

$$\underbrace{\frac{\mu}{1-\mu}\left\{\frac{\frac{1}{6}\mu^2}{1-\mu}+\frac{\frac{1}{4}\mu^2}{(1-\frac{1}{2}\mu)(1-\mu)}\right\}}_{=:\alpha} \le \frac{\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}$$

Also:

$$\alpha \le \frac{\mu}{1+\frac{1}{2}\mu} \Rightarrow \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha\mu \le \mu \Rightarrow \alpha \le \mu(1-\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{1-\frac{1}{2}\alpha} \le \mu$$

Das ist aber die Behauptung. ■

Satz III.7: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existieren die beschränkten Inversen $[F'(x_0)]^{-1}$ und $[I - \frac{1}{2}[F'(x_0)]^{-1} \cdot F''(x_0)[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)]^{-1}$ und es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \le \beta_0$$

$$\|[I - \tfrac{1}{2}[F'(x_0)]^{-1}F''(x_0)[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)]^{-}[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \le \delta_0$$

$$S_0 := \{x \in X : \|x - x_0\| \le 2\delta_0\} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0}\|F''(x)\| \le K_2$$

$$\sup_{x \in S_0}\|F'''(x)\| \le K_3$$

$$\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0 < \tfrac{2}{5}$$

$$\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2 \le f(\tilde{\mu}_0)$$

wobei

$$f(\mu) := \min\left\{\frac{1-\frac{5}{2}\mu+\frac{3}{2}\mu^2-\frac{1}{8}\mu^3}{\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\mu+\frac{1}{8}\mu^2}, \frac{6-15\mu+\frac{21}{2}\mu^2-\frac{15}{4}\mu^3}{1-\frac{1}{4}\mu^2}\right\}$$

Dann gilt:

(3.40) Die durch x_0 und $x_{n+1} := x_n - [I - \frac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1}F''(x_n)[F'(x_n)]^{-1} \cdot F(x_n)]^{-1}[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert und es gilt $x_n \in S_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

(3.41) Es gilt $F(x^*) = 0$.

Beweis:

(A) Es wird zunächst gezeigt, daß die durch β_0, μ_0, ν_0, δ_0 sowie

$$(3.42) \qquad \mathcal{P}_n := \frac{\frac{1}{6}\nu_n}{1-\tilde{\mu}_n} + \frac{\frac{1}{4}\tilde{\mu}_n^2}{(1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n)(1-\tilde{\mu}_n)}}{1-\frac{1}{2}\frac{\tilde{\mu}_n}{1-\tilde{\mu}_n}\left\{\frac{\frac{1}{6}\nu_n}{1-\tilde{\mu}_n}+\frac{\frac{1}{4}\tilde{\mu}_n^2}{(1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n)(1-\tilde{\mu}_n)}\right\}}$$

$$\tilde{\mu}_{n+1} := \frac{\tilde{\mu}_n}{1 - \tilde{\mu}_n}\,\varphi_n \tag{3.43}$$

$$\nu_{n+1} := \frac{\nu_n}{1 - \tilde{\mu}_n}\,\varphi_n^2 \tag{3.44}$$

$$\delta_{n+1} := \varphi_n\,\delta_n \tag{3.45}$$

$$\beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1 - \tilde{\mu}_n} \tag{3.46}$$

rekursiv definierten Folgen $\{\varphi_n\}$, $\{\tilde{\mu}_n\}$, $\{\nu_n\}$, $\{\delta_n\}$, $\{\beta_n\}$ existieren und daß gilt:

$$\tilde{\mu}_n \geq 0 \quad , \quad \tilde{\mu}_{n+1} \leq \tilde{\mu}_n \quad , \quad \tilde{\mu}_n = \beta_n K_2 \delta_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{3.47}$$

$$\nu_n \geq 0 \quad , \quad \nu_{n+1} \leq \nu_n \quad , \quad \nu_n = \beta_n K_3 \delta_n^2 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{3.48}$$

$$\beta_n \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{3.49}$$

$$\varphi_n \geq 0 \quad , \quad \varphi_n \leq \tfrac{1}{2} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{3.50}$$

$$\nu_n \leq f(\tilde{\mu}_n) \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{3.51}$$

Denn: Sei $\tilde{\mu}_n \in [0, \tfrac{3}{5}]$ und $0 \leq \nu_n \leq f(\tilde{\mu}_n)$. Dann gilt nach Satz III.6 wegen (3.43):

$$\tilde{\mu}_{n+1} \leq \tilde{\mu}_n \tag{3.52}$$

und nach Satz III.4 wegen (3.42):

$$\varphi_n \leq \tfrac{1}{2} \tag{3.53}$$

Wegen $\tilde{\mu}_n \in [0, \tfrac{3}{5}]$ ist außerdem

$$\tilde{\mu}_{n+1} \geq 0 \quad , \quad \varphi_n \geq 0 \tag{3.54}$$

Wegen (3.42) und (3.43) sowie (3.52) ist $\tilde{\mu}_{n+1} \in [0, \tfrac{3}{5}]$. Unter Beachtung von (3.53) folgt dann aus (3.44):

$$\nu_{n+1} \leq \tfrac{1}{4}\,\frac{1}{1 - \tfrac{3}{5}}\,\nu_n \leq \tfrac{5}{8}\,\nu_n \tag{3.55}$$

Wegen (3.54) ist außerdem

$$\nu_{n+1} \geq 0 \tag{3.56}$$

Aus (3.52) und (3.55) folgt mit Satz III.2: $\nu_{n+1} \leq f(\tilde{\mu}_{n+1})$. Wegen (3.53), (3.54) und (3.45) gilt

$$\delta_{n+1} \geq 0 \quad , \quad \delta_{n+1} \leq \tfrac{1}{2}\,\delta_n \tag{3.57}$$

Ist schließlich $\beta_n \geq 0$, so wegen (3.46) und $\tilde{\mu}_n \in [0, \tfrac{3}{5}]$ auch $\beta_{n+1} \geq 0$. Endlich hat man unter Verwendung von (3.43) - (3.46):

$$\beta_{n+1} K_2 \delta_{n+1} = \frac{\beta_n}{1 - \tilde{\mu}_n} K_2 \varphi_n \delta_n = \frac{\tilde{\mu}_n}{1 - \tilde{\mu}_n}\,\varphi_n = \tilde{\mu}_{n+1}$$

$$\beta_{n+1} K_3 \delta_{n+1} = \frac{\beta_n}{1 - \tilde{\mu}_n} K_3 \varphi_n^2 \delta_n^2 = \frac{\nu_n}{1 - \tilde{\mu}_n}\,\varphi_n^2 = \nu_{n+1}$$

Damit sind aber die Aussagen (3.47) - (3.51) induktiv bewiesen, denn es gilt $\tilde{\mu}_0 \in [0, \frac{3}{5}]$, $0 \le \nu_0 \le f(\tilde{\mu}_0)$ und $\beta_0 \ge 0$ nach Voraussetzung.

(B) Für den folgenden Beweis werden die Bezeichnungen verwendet:

$$F_n := F(x_n) \; ; \; F_n' := F'(x_n) \; ; \; F_n'^{-1} := [F'(x_n)]^{-1} \; ; \; F_n'' := F''(x_n)$$

$$c_n := - F_n'^{-1} F_n \; ; \; d_n := x_{n+1} - x_n = - [I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F_n]^{-1} F_n'^{-1} F_n$$

Es wird nun durch vollständige Induktion nach n gezeigt:
$(\text{Ind } 1)_n$ $F_n'^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit $\| F_n'^{-1} \| \le \beta_n$
$(\text{Ind } 2)_n$ $[I - \frac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F_n]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt.
$(\text{Ind } 3)_n$ $[I - \frac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$$\| [I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n]^{-1} \| \le \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_n}$$

$(\text{Ind } 4)_n$ $x_{n+1} \in S_0$, $\| x_{n+1} - x_n \| = \| d_n \| \le \delta_n$

Induktionsverankerung:
$(\text{Ind } 1)_0$: nach Voraussetzung
$(\text{Ind } 2)_0$: nach Voraussetzung
$(\text{Ind } 3)_0$: $\| \frac{1}{2} F_0'^{-1} F_0'' d_0 \| \le \frac{1}{2} \beta_0 K_2 \delta_0 = \frac{1}{2} \tilde{\mu}_0$ nach Voraussetzung. Hieraus folgt unter Verwendung des Banach-Lemmas (Satz I.1):

$$\| [I - \tfrac{1}{2} F_0'^{-1} F_0'' d_0]^{-1} \| \le \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_0}$$

$(\text{Ind } 4)_0$: $\| x_1 - x_0 \| \le \delta_0$ nach Voraussetzung $\Rightarrow$ $x_1 \in S$.

Schluß von n auf n+1:
Nach $(\text{Ind } 4)_n$ gilt $x_{n+1} \in S_0$, d.h. F_{n+1}, F_{n+1}' existieren. Nach $(\text{Ind } 1)_n$ existiert $F_n'^{-1}$, nach $(\text{Ind } 4)_n$ gilt $\| x_{n+1} - x_n \| \le \delta_n$. Wegen

$$\| F_n' [F_n' - F_{n+1}'] \| \le \beta_n K_2 \delta_n = \tilde{\mu}_n < 1 \qquad \text{nach (3.47)}$$

existiert $[I - F_n'^{-1} [F_n' - F_{n+1}']]^{-1}$ und es gilt

$$\| [I - F_n'^{-1} [F_n' - F_{n+1}']]^{-1} \| \le \frac{1}{1 - \tilde{\mu}_n}$$

Also existiert $[I - F_n'^{-1} [F_n' - F_{n+1}']]^{-1} F_n'^{-1} = F_{n+1}'^{-1}$ mit

$$\| F_{n+1}'^{-1} \| \le \frac{\beta_n}{1 - \tilde{\mu}_n} = \beta_{n+1} \qquad \text{nach (3.46)}$$

Damit ist $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ bewiesen.
Es ist $x_{n+1} - x_n = - [I - \frac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F_n]^{-1} F_n'^{-1} F_n$, d.h.

(3.58)
$$d_n = [I + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' c_n]^{-1} c_n$$
$$c_n = [I + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' c_n] d_n$$
$$= d_n + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' c_n d_n \quad (\text{wobei } F_n'' c_n d_n := F_n''(c_n, d_n))$$
$$= d_n + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n c_n \quad \text{da } F_n'' \text{ symmetrisch bilinear ist.}$$
$$d_n = [I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n] c_n$$
$$c_n = [I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n]^{-1} d_n \quad (\text{die Inverse existiert nach } (\text{Ind } 3)_n)$$

$$= \left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\right]^{-1}\{I\} d_n$$

$$= \left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\right]^{-1}\{I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\} d_n$$

$$= \left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\right]^{-1}\{\left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\right] + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\} d$$

$$= \{I + \tfrac{1}{2}\left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\right]^{-1} F_n'^{-1} F_n'' d_n\} d_n$$

$$= d_n + \tfrac{1}{2}\left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\right]^{-1} F_n'^{-1} F_n'' d_n^{(2)}$$

Also:

(3.59) $\quad c_n = d_n + \tfrac{1}{2}\left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\right]^{-1} F_n'^{-1} F_n'' d_n^{(2)}$

Aus (3.58) folgt $\quad d_n + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' c_n d_n + F_n'^{-1} F_n = \Theta$ oder

(3.60) $\quad F_n + F_n' d_n + \tfrac{1}{2} F_n'' c_n d_n = \Theta$

Setzt man hier (3.59) ein, so erhält man:

(3.61) $\quad F_n + F_n' d_n + \tfrac{1}{2} F_n'' d_n^{(2)} + \tfrac{1}{2} F_n'' d_n \tfrac{1}{2}\left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\right]^{-1} F_n'^{-1} F_n'' d_n^{(2)}$
$\quad = \Theta$

Hieraus folgt:

(3.62) $\quad \|F_{n+1}\| = \|F_{n+1} - F_n - F_n' d_n - \tfrac{1}{2} F_n'' d_n^{(2)} - \tfrac{1}{4} F_n'' d_n\left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} \cdot\right.$
$\quad \left. \cdot F_n'' d_n\right]^{-1} F_n'^{-1} F_n'' d_n^{(2)} \|$

$$\leq \tfrac{1}{6} K_3 \|d_n\|^3 + \tfrac{1}{4} \|F_n''\| \|d_n\| \|\left[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n\right]^{-1}\| \cdot$$
$$\cdot \|F_n'^{-1}\| \|F_n''\| \|d_n\|^2$$

$$\leq \tfrac{1}{6} K_3 \delta_n^3 + \tfrac{1}{4} K_2 \delta_n \frac{\beta_n K_2 \delta_n}{1 - \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n} \delta_n$$

$$= \tfrac{1}{6} K_3 \delta_n^3 + \tfrac{1}{4} K_2 \delta_n^2 \frac{\tilde{\mu}_n}{1 - \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n}$$

Hieraus folgt mit $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ und (3.62)

(3.63) $\quad \|F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}\| \leq \|F_{n+1}'^{-1}\| \|F_{n+1}\|$

$$\leq \frac{\beta_n}{1 - \tilde{\mu}_n} \left\{ \tfrac{1}{6} K_3 \delta_n^3 + \tfrac{1}{4} K_2 \delta_n^2 \frac{\tilde{\mu}_n}{1 - \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\tfrac{1}{6}\nu_n}{1 - \tilde{\mu}_n} + \frac{\tfrac{1}{4}\tilde{\mu}_n^2}{(1 - \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n)(1 - \tilde{\mu}_n)} \right\}$$

nach (3.47), (3.48)

Somit:

(3.64) $\quad \|\tfrac{1}{2} F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}'' F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}\| \leq$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{\beta_n}{1 - \tilde{\mu}_n} K_2 \delta_n \left\{ \frac{\tfrac{1}{6}\nu_n}{1 - \tilde{\mu}_n} + \frac{\tfrac{1}{4}\tilde{\mu}_n^2}{(1 - \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n)(1 - \tilde{\mu}_n)} \right\}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n}{1 - \tilde{\mu}_n} \left\{ \frac{\tfrac{1}{6}\nu_n}{1 - \tilde{\mu}_n} + \frac{\tfrac{1}{4}\tilde{\mu}_n^2}{(1 - \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_n)(1 - \tilde{\mu}_n)} \right\}$$

$< \tfrac{1}{3}$ $\quad$ nach Satz III.5 und (3.51)

Somit gilt: $[I - \frac{1}{2} F'^{-1}_{n+1} F''_{n+1} F'^{-1}_{n+1} F_{n+1}]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt und es gilt nach (3.64) unter Verwendung des Banach-Lemmas (Satz I.1):

$$(3.65) \qquad \| [I - \tfrac{1}{2} F'^{-1}_{n+1} F''_{n+1} F'^{-1}_{n+1} F_{n+1}]^{-1} \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n}{1-\tilde{\mu}_n}\left\{\frac{\frac{1}{6}\nu_n}{1-\tilde{\mu}_n} + \frac{\frac{1}{4}\tilde{\mu}_n^2}{(1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n)(1-\tilde{\mu}_n)}\right\}}$$

$$\leq \frac{3}{2}$$

Damit ist $(\text{Ind } 2)_{n+1}$ bewiesen.
Man hat weiter

$$d_{n+1} = - [I - \tfrac{1}{2} F'^{-1}_{n+1} F''_{n+1} F'^{-1}_{n+1} F_{n+1}]^{-1} F'^{-1}_{n+1} F_{n+1}$$

(Die Existenz der auftretenden Inversen wurde in $(\text{Ind } 1)_{n+1}$, $(\text{Ind } 2)_{n+1}$ bereits bewiesen.)
D.h. mit (3.63), (3.65), (3.42):

$$(3.66) \qquad \|d_{n+1}\| \leq \vartheta_n \delta_n = \delta_{n+1} \leq \tfrac{1}{2}\delta_n \qquad \text{nach (3.45) und (3.49)}$$

Also:

$$\|\tfrac{1}{2} F'^{-1}_{n+1} F''_{n+1} d_{n+1}\| \leq \tfrac{1}{2}\beta_{n+1} K_2 \delta_{n+1} = \tfrac{1}{2}\tilde{\mu}_{n+1} < 1 \qquad \text{nach (3.47)}$$

woraus folgt:

$$\| [I - \tfrac{1}{2} F'^{-1}_{n+1} F''_{n+1} d_{n+1}]^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{n+1}}$$

Damit ist $(\text{Ind } 3)_{n+1}$ bewiesen.
Aus (3.66) folgt $\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq \delta_{n+1}$. Mit (3.49) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \leq 2\delta_0$$

Also $x_{n+2} \in S_0$. Daraus folgt $(\text{Ind } 4)_{n+1}$.
Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Die Folge $\{x_n\}$ existiert also und es gilt $x_n \in S_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Wegen (3.66) und (3.49) bilden die $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig und S_0 abgeschlossen ist, gibt es ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Wegen (3.47), (3.49) und (3.62) sowie der Stetigkeit von F und der Stetigkeit der Norm gilt

$$\|F(x^*)\| = \lim_{n\to\infty} \|F(x_n)\| = 0 \qquad \text{d.h.} \quad F(x^*) = \theta$$

Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Fehlerschranke: Wie dies schon für das Newton-Verfahren in Kapitel I kurz angesprochen wurde, so erhält man auch aus diesem Satz über das Halley-Verfahren unmittelbar eine rekursiv berechenbare Fehlerschranke. Man hat nämlich

$$\|x^* - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k = \sum_{k=n}^{m} \delta_k + 2\delta_{m+1}$$

Dabei lassen sich die δ_i wie in Satz III.7 angegeben rekursiv aus den Ausgangsdaten $\tilde{\mu}_0$, ν_0, δ_0 berechnen. Wie schon für das Newton-Verfahren bemerkt wurde, so wird auch hier die Wahl $m = n + 5$ bis höchstens $m = n + 10$ eine sehr gute Fehlerschranke liefern.

(weiter Seite 110)

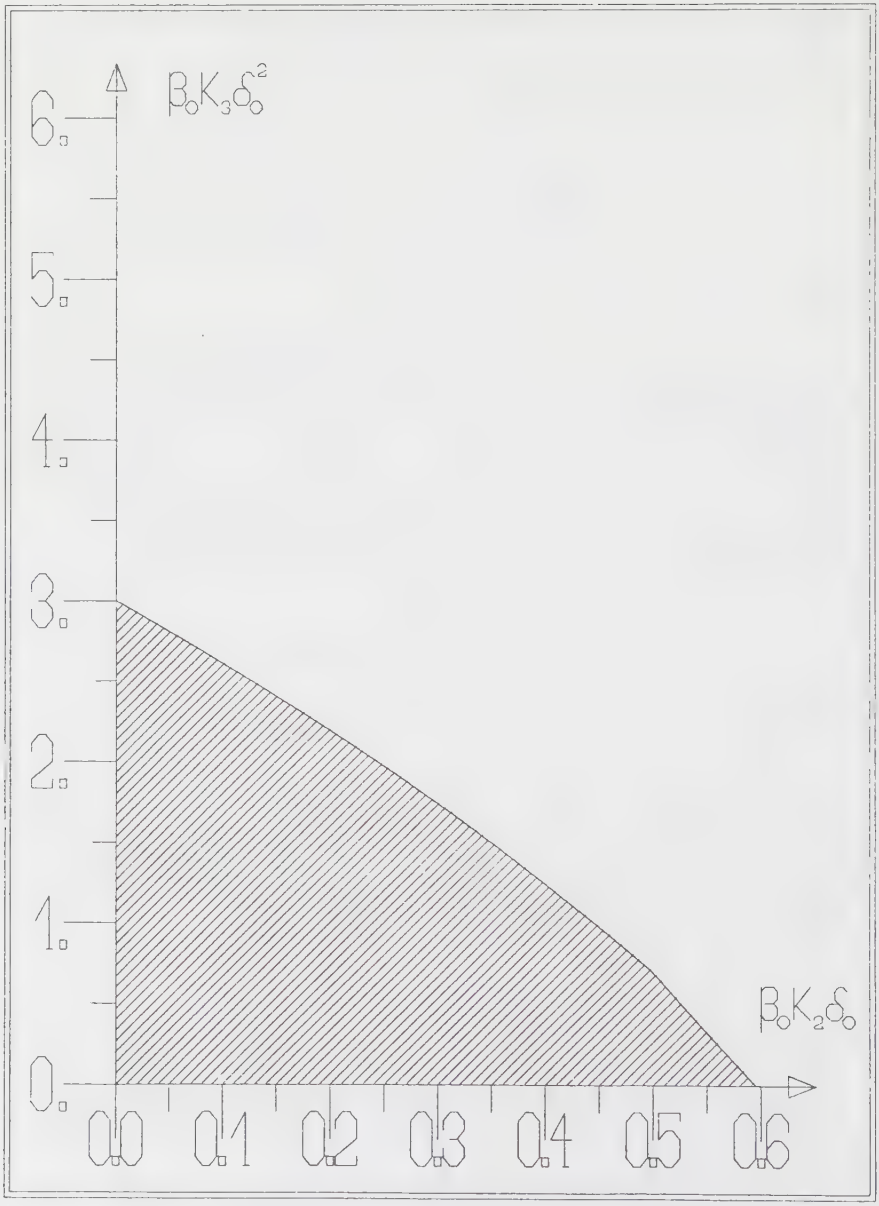


Abbildung III/4

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0$ und $\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$, für die Satz III.7 die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0$ und ν_0 ist schraffiert.

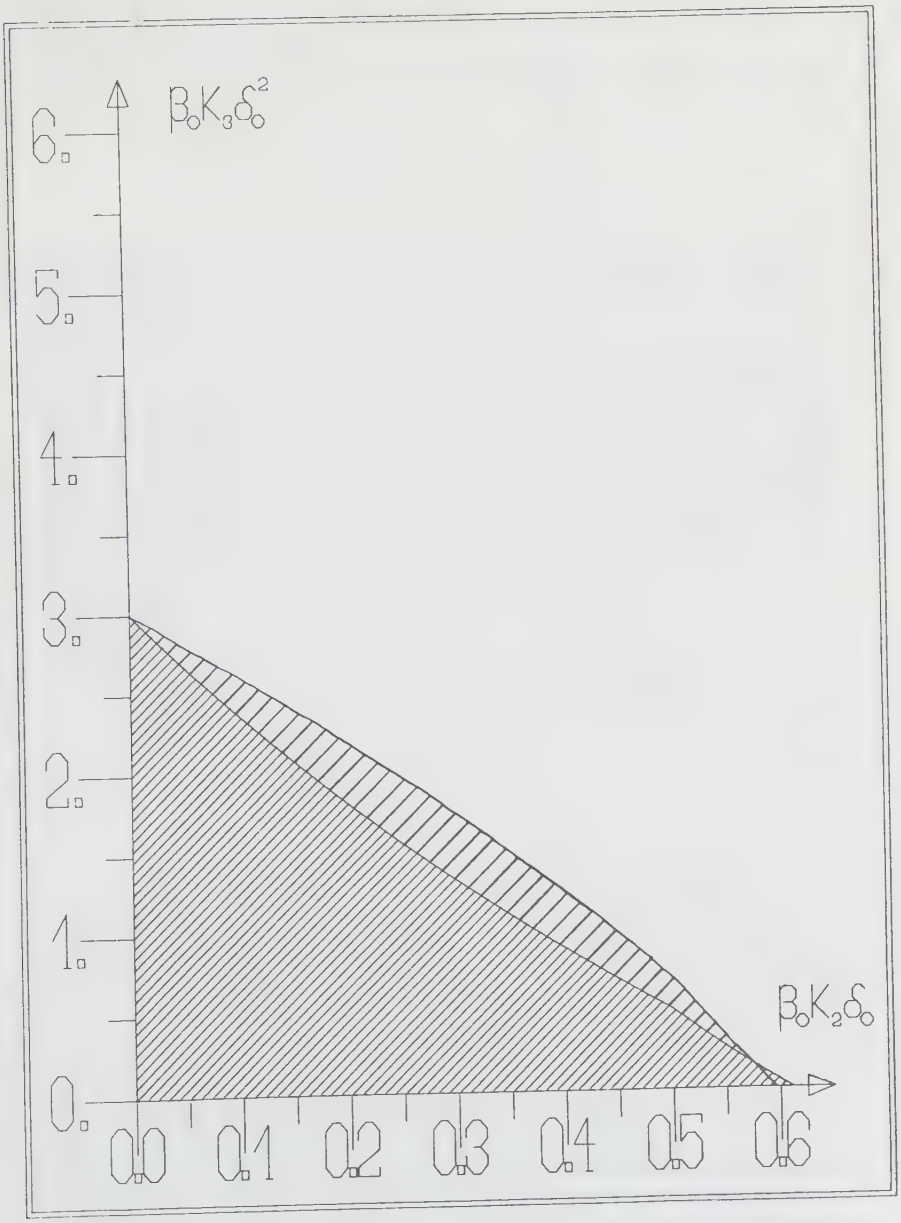


Abbildung III/5

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0$ und $\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$, für die Satz III.7 (obere Kurve) bzw. Satz III.1 mit N = 0 (untere Kurve) die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der jeweils zulässigen Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0$ und ν_0 ist schraffiert.

Statt dieser a-priori-Fehlerschranke erhält man leicht eine a-posteriori-Fehlerschranke, indem man bei der rekursiven Berechnung der δ_j statt von $\tilde{\mu}_0$, ν_0 , δ_0 von

$$\tilde{\mu}_{n-1} := \|[F'(x_{n-1})]^{-1}\| \, K_2 \, \|x_n - x_{n-1}\|$$
$$\nu_{n-1} := \|[F'(x_{n-1})]^{-1}\| \, K_3 \, \|x_n - x_{n-1}\|^2$$
$$\delta_{n-1} := \|x_n - x_{n-1}\|$$

ausgeht.

Der durch Satz III.7 gesicherte Konvergenzbereich des Halley-Verfahrens ist in der Abbildung III/4 auf Seite 108 graphisch dargestellt. In Abbildung III/5 auf Seite 109 wird er mit dem Konvergenzbereich von Satz III.1 für N = 0 verglichen, d.h. mit dem Konvergenzbereich, den Satz III.1 liefert, wenn man sich beim Beweis dieses Satzes ebenfalls der "klassischen" Induktionsmethode bedient. Hierbei zeigt sich, daß Satz III.7 den Aussagen von Satz III.1 teilweise überlegen, teilweise unterlegen ist, d.h. beide Sätze ergänzen sich in ihren Ergebnissen. Das Überraschende der Ergebnisse beider Sätze ist, daß die $\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0$ in ihrem Wert auch größer als $\frac{1}{2}$ sein dürfen, wobei nach Satz III.1 der $\tilde{\mu}_0$-Wert sogar über 0.61 liegen darf, wenn nur ν_0 genügend klein ist. Zumindest auf den ersten Blick erstaunlich ist dies deshalb, weil bei dem analogen Satz über das Newton-Verfahren (Satz I.2) $\tilde{\mu}_0 \leq \frac{1}{2}$ gelten mußte. In der Tat ergibt sich hieraus - wie in dieser Arbeit noch an Beispielen gezeigt wird - in manchen Fällen ein im Vergleich zum Newton-Verfahren um 10 - 20% größerer Konvergenzbereich des Halley-Verfahrens. Es muß allerdings auch darauf hingewiesen werden, daß weder durch Satz III.1 noch durch Satz III.7 die Konvergenz des Halley-Verfahrens für die vielleicht einfachste nichtlineare Aufgabenstellung, nämlich die Nullstellenbestimmung von $f(x) := x^2$, gesichert werden kann. Denn:

$$f(x) := x^2 \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \quad , \quad f''(x) = 2$$

und somit für beliebiges $x_0 \neq 0$:

$$[f'(x_0)]^{-1} = \frac{1}{2x_0}$$

$$\left[1 - \tfrac{1}{2}\,[f'(x_0)]^{-1}\, f''(x_0)\,[f'(x_0)]^{-1}\, f(x_0)\right][f'(x_0)]^{-1}\, f(x_0) = \tfrac{2}{3}\, x_0$$

Also: $\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0 = \frac{2}{3}$

Im gleichen Falle wäre jedoch die Konvergenz des Newton-Verfahrens für ebenfalls beliebiges x_0 gesichert, da dann $\tilde{\mu}_0 = \frac{1}{2}$ wäre. (Aus den am Schluß dieses Kapitels angegebenen Sätzen zum Halley-Verfahren folgt dessen Konvergenz übrigens auch für das soeben angegebene Beispiel, was dann allerdings durch andere Nachteile erkauft werden muß.)

Wie bereits angekündigt wurde, soll nun am Beispiel von Satz III.7 gezeigt werden, wie man einen derartigen Satz in Voraussetzungen und Beweis leicht so umformen kann, daß sich seine Aussagen mit Hilfe der Methode der retardierten Induktion deutlich verschärfen lassen. Hierzu entnimmt man dem nach der bekannten Induktionsmethode geführten Beweis des Satzes zunächst alle die Beziehungen, die wesentlich sind, um die Existenz der Iterationsfolge zu garantieren, d.h. Beziehungen, durch die die Existenz von Inversen etc. sichergestellt wird. Wenn man die Symbolik von Satz III.7 beibehält, so erhält man die Forderungen:

$\tilde{\mu}_n < 1$, wodurch dann auch $\frac{1}{2}\,\tilde{\mu}_n < 1$ garantiert wird; und

$$\frac{\frac{1}{2}\,\tilde{\mu}_n}{1 - \tilde{\mu}_n}\left\{\frac{\frac{1}{6}\,\nu_n}{1 - \tilde{\mu}_n} + \frac{\frac{1}{4}\,\tilde{\mu}_n^2}{(1 - \frac{1}{2}\,\tilde{\mu}_n)(1 - \tilde{\mu}_n)}\right\} < 1$$

Mit $$\psi_n := \frac{\frac{1}{6}\nu_n}{1-\tilde{\mu}_n} + \frac{\frac{1}{4}\tilde{\mu}_n^2}{(1-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n)(1-\tilde{\mu}_n)}$$

bedeutet dies $$\frac{\frac{1}{2}\tilde{\mu}_n}{1-\tilde{\mu}_n}\,\psi_n < 1$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so folgt hieraus die Existenz von

$$[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' d_n]^{-1} \;;\; F_{n+1}'^{-1} \;;\; [I - \tfrac{1}{2} F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}'' F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}]^{-1}$$

wie im Beweis von Satz III.7 ausgeführt wurde. Außerdem muß natürlich sichergestellt werden, daß alle x_n innerhalb der Kugel S_o liegen. Es muß also weiterhin gefordert werden

$$\sum_{n=0}^{k} \delta_n \le 2\,\delta_o \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Sofern nur diese Bedingungen erfüllt sind, kann man - wie in Satz III.7 - die Konvergenz der Folge $\{x_n\}$ beweisen. Als nächstes ist nun festzustellen, wie sich die $\tilde{\mu}_{n+1}, \nu_{n+1}, \delta_{n+1}$ etc. aus den $\tilde{\mu}_n, \nu_n, \delta_n$ etc. berechnen, da man ja über diese Größen primär nur für n = 0 verfügt. Im Gegensatz zu vielen in der Literatur angegebenen Sätzen sind diese Informationen in Satz III.7 in (3.42) - (3.46) bereits explizit enthalten. Hierbei ist es dann erforderlich, die δ_n einer "Normierung" zu unterwerfen, indem man setzt

$$\delta_n =: \varepsilon_n \delta_o$$

Dabei ist dann natürlich $\varepsilon_o = 1$ und aus

$$\underbrace{\delta_{n+1}}_{\varepsilon_{n+1}\delta_o} = \underbrace{\psi_n \delta_n}_{\psi_n \varepsilon_n \delta_o}$$

folgt $\varepsilon_{n+1} = \psi_n \varepsilon_n$, d.h. die ε_{n+1} berechnen sich aus den ε_n in gleicher Weise wie die δ_{n+1} aus den δ_n. Die Bedingung

$$\sum_{n=0}^{k} \delta_n \le 2\,\delta_o \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

die noch das auf die konkrete Aufgabe bezogene δ_o enthält, läßt sich nun in der vom speziellen Problem unabhängigen Form

$$\sum_{n=0}^{k} \varepsilon_n \le 2 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

schreiben. Schließlich ist es noch notwendig, jene Bedingungen festzulegen, die es von einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ ab gestatten sollen, alle diese Aussagen durch vollständige Induktion zu beweisen. Da die Rekursionsausdrücke für die $\tilde{\mu}_n$, ν_n in den $\tilde{\mu}_n$, ν_n monoton fallen, genügt hierfür die Forderung

$$\tilde{\mu}_{N+1} \le \tilde{\mu}_N \quad , \quad \nu_{N+1} \le \nu_N$$

Da dann

$$\varepsilon_{N+j} = \psi_{N+j}\varepsilon_{N+j-1} \le \psi_N \varepsilon_{N+j-1} \le \psi_N^j \varepsilon_N$$

gilt, muß für die Konvergenz der Reihe $\sum \varepsilon_n$ außerdem noch gelten $\psi_N < 1$. Um $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \le 2$ zu erhalten, muß man sogar fordern

$$\varepsilon_o + \cdots + \varepsilon_N + \frac{\psi_N}{1-\psi_N}\,\varepsilon_N \le 2$$

Dies entnimmt man dem Beweis des folgenden Satzes, der die obigen, motivierenden Überlegungen mathematisch exakt ausführt.

Satz III.8: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existieren die beschränkten Inversen

$$[F'(x_0)]^{-1} \quad \text{und} \quad \left[I - \tfrac{1}{2}[F'(x_0)]^{-1} F''(x_0)[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\right]^{-1}$$

Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta_0$$

$$\left\|\left[I - \tfrac{1}{2}[F'(x_0)]^{-1} F''(x_0)[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\right]^{-1}[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\right\| \leq \delta_0$$

$$S_0 := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq 2\delta_0\} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F'''(x)\| \leq K_3$$

$$\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0 < 1$$

$$\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$$

Überdies gelte:
Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch

$\tilde{\mu}_0$, ν_0 sowie $\varepsilon_0 := 1$ und

(3.67) $$\psi_n := \frac{\frac{1}{6}\nu_n}{1 - \tilde{\mu}_n} + \frac{\frac{1}{4}\tilde{\mu}_n^2}{(1 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_n)(1 - \tilde{\mu}_n)}$$

(3.68) $$\varphi_n := \frac{\psi_n}{1 - \frac{1}{2}\dfrac{\tilde{\mu}_n}{1 - \tilde{\mu}_n}\psi_n}$$

(3.69) $$\tilde{\mu}_{n+1} := \frac{\tilde{\mu}_n}{1 - \tilde{\mu}_n}\varphi_n$$

(3.70) $$\nu_{n+1} := \frac{\nu_n}{1 - \tilde{\mu}_n}\varphi_n^2$$

(3.71) $$\varepsilon_{n+1} := \varphi_n \varepsilon_n$$

rekursiv definierten Zahlen ψ_n, φ_n, $\tilde{\mu}_n$, ν_n, ε_n für $n \leq N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

(3.72) $$\tilde{\mu}_n < 1 \qquad \forall\, n \leq N$$

(3.73) $$\frac{1}{2}\frac{\tilde{\mu}_n}{1 - \tilde{\mu}_n}\psi_n < 1 \qquad \forall\, n \leq N$$

(3.74) $$\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_n \leq 2 \qquad \forall\, n \leq N$$

(3.75) $$\tilde{\mu}_{N+1} \leq \tilde{\mu}_N$$

(3.76) $$\nu_{N+1} \leq \nu_N$$

(3.77) $$\varphi_N < 1$$

$$(3.78)\qquad \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \frac{\varphi_N}{1-\varphi_N}\,\varepsilon_N \le 2$$

Dann gilt:

(3.79) Die durch x_0 und

$$x_{n+1} := x_n - \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_n)\right]^{-1} F''(x_n)\left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)\right]^{-1} \cdot \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)$$

rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

(3.80) Es gilt $F(x^*) = 0$.

Beweis: Zusätzlich zu den durch (3.67) - (3.71) definierten Folgen werden noch die durch δ_0, β_0 und

$$(3.81)\qquad \delta_n := \varepsilon_n \delta_0$$

$$(3.82)\qquad \beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1-\tilde{\mu}_n}$$

rekursiv definierten Folgen $\{\delta_n\}, \{\beta_n\}$ eingeführt.

Es wird nun gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (3.67) - (3.71) und (3.81), (3.82) definierten Zahlen ψ_n, φ_n, $\tilde{\mu}_n$, ν_n, ε_n, δ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, sowie

$$(3.83)\qquad \tilde{\mu}_n \ge 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,; \qquad \tilde{\mu}_{n+1} \le \tilde{\mu}_n \quad \forall\, n \ge N$$

$$(3.84)\qquad \nu_n \ge 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,; \qquad \nu_{n+1} \le \nu_n \quad \forall\, n \ge N$$

$$(3,85)\qquad \psi_n \ge 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,; \qquad \psi_{n+1} \le \psi_n \quad \forall\, n \ge N$$

$$(3.86)\qquad \varphi_n \ge 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,; \qquad \varphi_{n+1} \le \varphi_n \quad \forall\, n \ge N$$

$$(3.87)\qquad \varepsilon_n \ge 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

$$(3.88)\qquad \beta_n \ge 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

$$(3.89)\qquad \delta_n \ge 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,; \qquad \sum_{i=0}^{k} \delta_i \le 2\,\delta_0 \quad \forall\, k\in\mathbb{N},$$

d.h. insbesondere $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \delta_i \le 2\delta_0$

Denn: Wegen (3.72) existieren die durch (3.67) - (3.71) und (3.81), (3.82) definierten Zahlen und sind positiv oder Null für $n \le N+1$, da $\tilde{\mu}_0$, ν_0, δ_0, $\varepsilon_0 \ge 0$ gilt. Die Rekursionsausdrücke (3.67) - (3.70) sind in den $\tilde{\mu}_n$, ν_n, ψ_n, φ_n monoton fallend, d.h.

$$0 \le \tilde{\mu}_{n+1} \le \tilde{\mu}_n < 1\,, \quad 0 \le \nu_{n+1} \le \nu_n \qquad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\,\frac{\tilde{\mu}_n}{1-\tilde{\mu}_n}\,\psi_n < 1$$

$$\Rightarrow \psi_{n+1} \le \psi_n \;\Rightarrow\; \varphi_{n+1} \le \varphi_n \;\Rightarrow\; \tilde{\mu}_{n+2} \le \tilde{\mu}_{n+1}\,, \quad \nu_{n+2} \le \nu_{n+1}$$

usw.

Wegen (3.75), (3.76) gilt dann (3.72) für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß die durch (3.67) - (3.71) und (3.81), (3.82) definierten Folgen für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren und (3.83) - (3.88) erfüllen. Der erste Teil von (3.89) folgt ebenfalls unmittelbar. Der zweite Teil ergibt sich so:

Für $k \le N$ gilt wegen (3.81) und (3.74)

$$\delta_0 + \cdots + \delta_k = (\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_k)\,\delta_0 \le 2\,\delta_0$$

(weiter Seite 123)

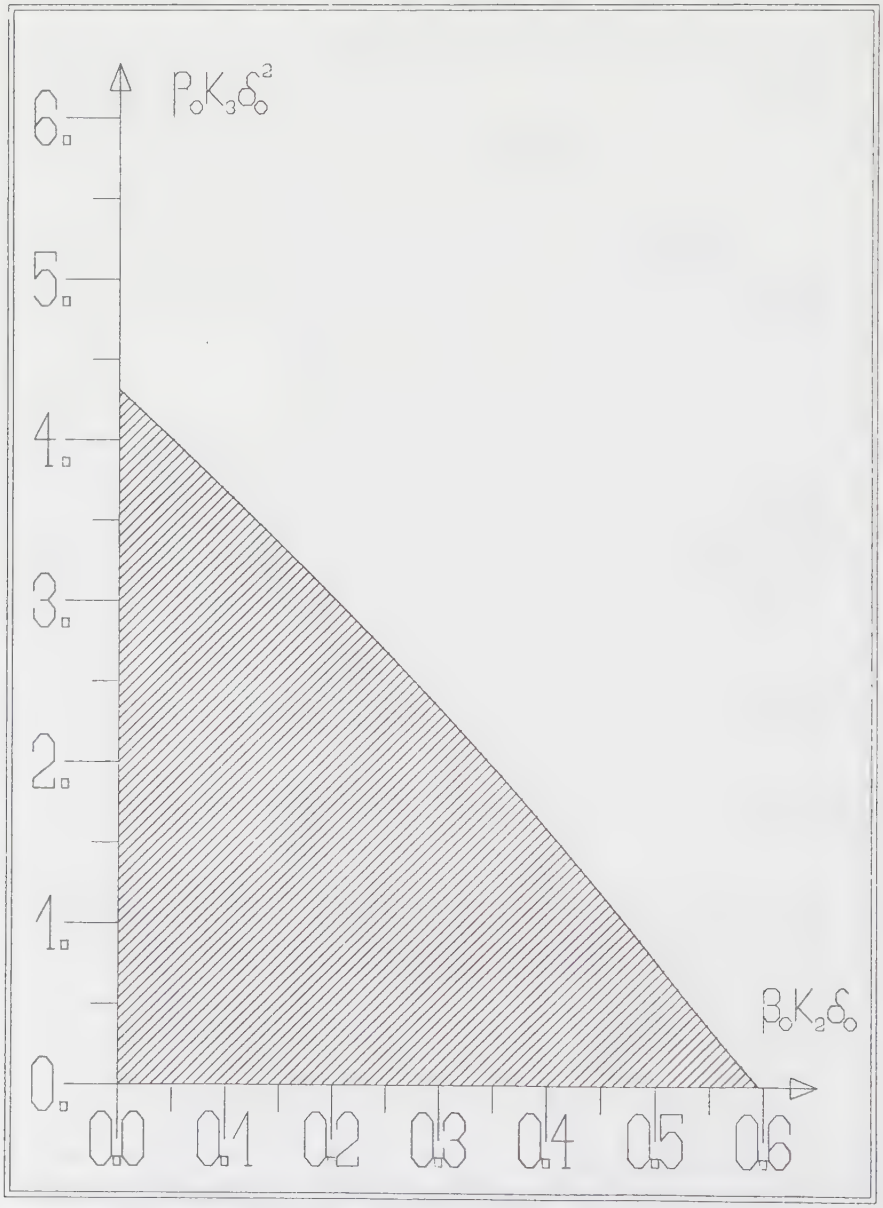


Abbildung III/6

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0$ und $\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$, für die Satz III.8 für N = 10 die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0$ und ν_0 ist schraffiert.

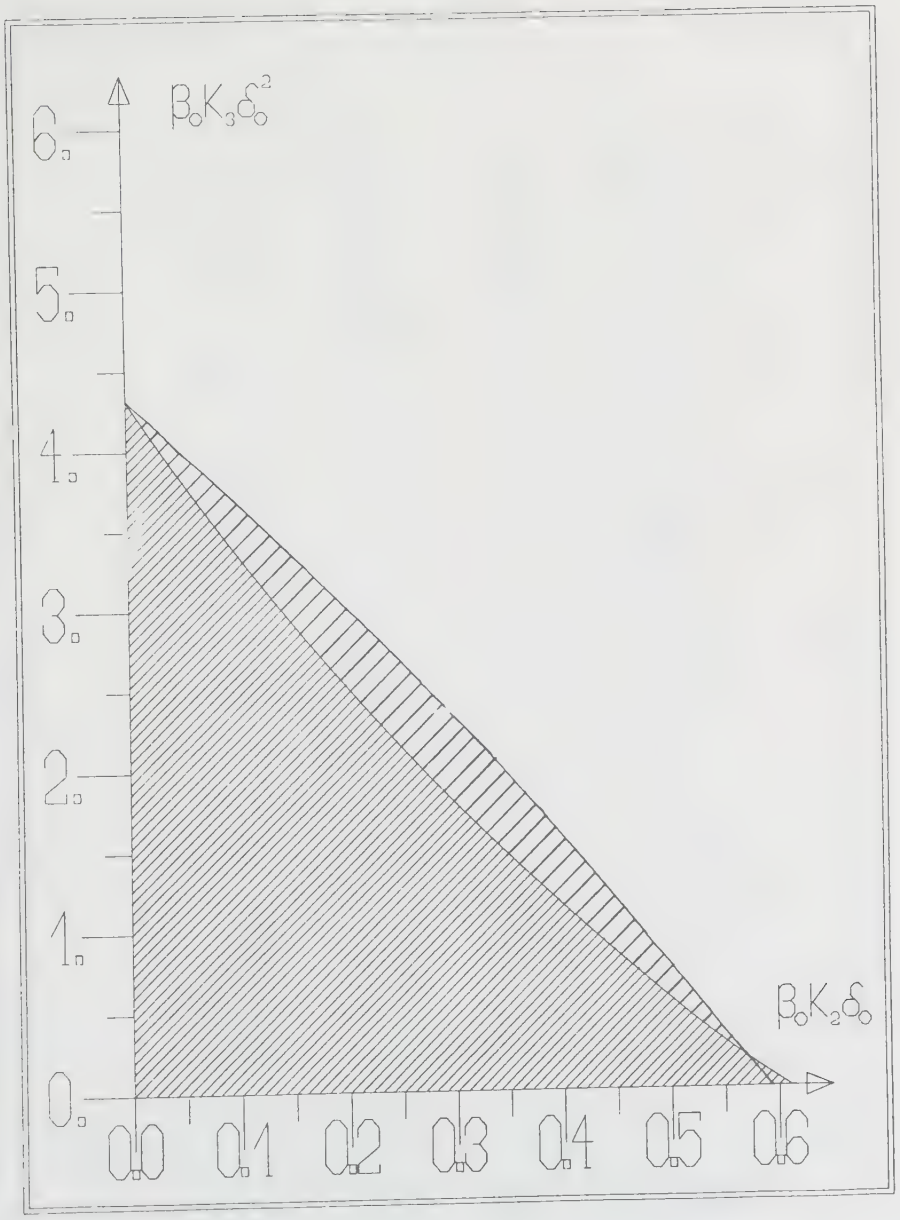


Abbildung III/7

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0 := \beta_0 K_2 \delta_0$ und $\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$, für die Satz III.8 mit N = 10 (obere Kurve) bzw. Satz III.1 mit N = 10 (untere Kurve) die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der jeweils zulässigen Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_0$ und ν_0 ist schraffiert.

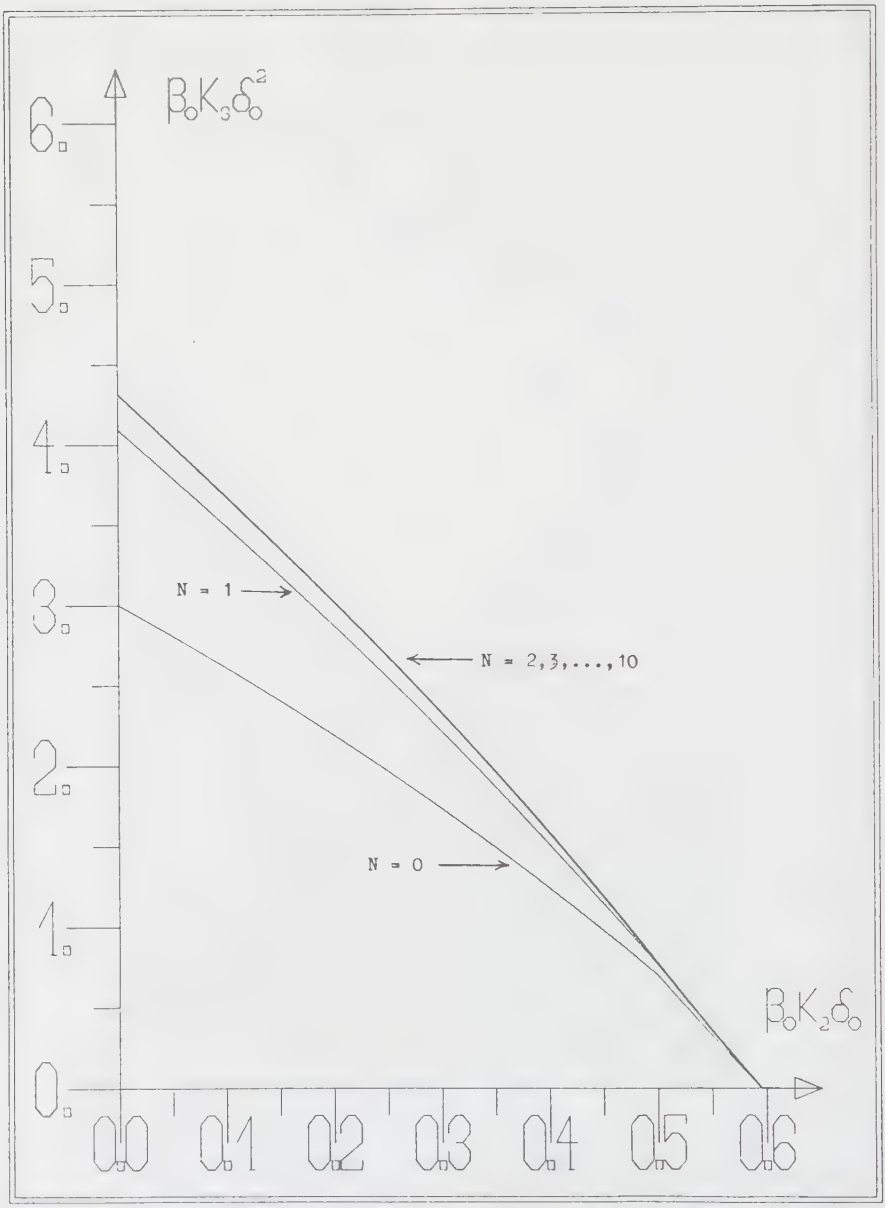


Abbildung III/8

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_o := \beta_o K_2 \delta_o$ und $\nu_o := \beta_o K_3 \delta_o^2$, für die Satz III.8 mit verschiedenen Werten von N die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Die zulässigen Wertekombinationen von $\tilde{\mu}_o$ und ν_o liegen zwischen den jeweiligen Kurven und den Koordinatenachsen.

Tabelle III/2

$\tilde{\mu}_o$	ν_o	$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.0	4.31406	0.052	3.98794
0.001	4.30784	0.053	3.98161
0.002	4.30162	0.054	3.97529
0.003	4.29539	0.055	3.96895
0.004	4.28917	0.056	3.96261
0.005	4.28294	0.057	3.95628
0.006	4.27671	0.058	3.94994
0.007	4.27048	0.059	3.94359
0.008	4.26425	0.060	3.93725
0.009	4.25801	0.061	3.93090
0.010	4.25178	0.062	3.92455
0.011	4.24554	0.063	3.91820
0.012	4.23930	0.064	3.91185
0.013	4.23305	0.065	3.90549
0.014	4.22681	0.066	3.89914
0.015	4.22056	0.067	3.89278
0.016	4.21431	0.068	3.88641
0.017	4.20806	0.069	3.88005
0.018	4.20181	0.070	3.87368
0.019	4.19555	0.071	3.86731
0.020	4.18930	0.072	3.86094
0.021	4.18304	0.073	3.85457
0.022	4.17678	0.074	3.84819
0.023	4.17051	0.075	3.84181
0.024	4.16425	0.076	3.83543
0.025	4.15798	0.077	3.82905
0.026	4.15171	0.078	3.82266
0.027	4.14544	0.079	3.81627
0.028	4.13916	0.080	3.80988
0.029	4.13289	0.081	3.80349
0.030	4.12661	0.082	3.79709
0.031	4.12033	0.083	3.79070
0.032	4.11405	0.084	3.78430
0.033	4.10776	0.085	3.77789
0.034	4.10147	0.086	3.77149
0.035	4.09518	0.087	3.76508
0.036	4.08889	0.088	3.75867
0.037	4.08260	0.089	3.75226
0.038	4.07630	0.090	3.74584
0.039	4.07001	0.091	3.73943
0.040	4.06371	0.092	3.73301
0.041	4.05741	0.093	3.72659
0.042	4.05110	0.094	3.72016
0.043	4.04479	0.095	3.71373
0.044	4.03849	0.096	3.70730
0.045	4.03218	0.097	3.70087
0.046	4.02586	0.098	3.69444
0.047	4.01955	0.099	3.68800
0.048	4.01323	0.100	3.68156
0.049	4.00691	0.101	3.67512
0.050	4.00059	0.102	3.66868
0.051	3.99427	0.103	3.66223

Tabelle III/2

$\tilde{\mu}_o$	ν_o	$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.104	3.65578	0.156	3.31675
0.105	3.64933	0.157	3.31016
0.106	3.64287	0.158	3.30356
0.107	3.63641	0.159	3.29696
0.108	3.62996	0.160	3.29036
0.109	3.62349	0.161	3.28375
0.110	3.61703	0.162	3.27715
0.111	3.61056	0.163	3.27053
0.112	3.60409	0.164	3.26392
0.113	3.59762	0.165	3.25730
0.114	3.59114	0.166	3.25068
0.115	3.58467	0.167	3.24406
0.116	3.57819	0.168	3.23743
0.117	3.57170	0.169	3.23080
0.118	3.56522	0.170	3.22417
0.119	3.55873	0.171	3.21754
0.120	3.55224	0.172	3.21090
0.121	3.54574	0.173	3.20426
0.122	3.53925	0.174	3.19761
0.123	3.53275	0.175	3.19096
0.124	3.52625	0.176	3.18431
0.125	3.51974	0.177	3.17766
0.126	3.51324	0.178	3.17100
0.127	3.50673	0.179	3.16434
0.128	3.50022	0.180	3.15768
0.129	3.49370	0.181	3.15101
0.130	3.48718	0.182	3.14434
0.131	3.48066	0.183	3.13767
0.132	3.47414	0.184	3.13100
0.133	3.46761	0.185	3.12432
0.134	3.46109	0.186	3.11763
0.135	3.45455	0.187	3.11095
0.136	3.44802	0.188	3.10426
0.137	3.44148	0.189	3.09757
0.138	3.43494	0.190	3.09087
0.139	3.42840	0.191	3.08418
0.140	3.42186	0.192	3.07747
0.141	3.41531	0.193	3.07077
0.142	3.40876	0.194	3.06406
0.143	3.40220	0.195	3.05735
0.144	3.39565	0.196	3.05064
0.145	3.38909	0.197	3.04392
0.146	3.38253	0.198	3.03720
0.147	3.37596	0.199	3.03047
0.148	3.36940	0.200	3.02374
0.149	3.36282	0.201	3.01701
0.150	3.35625	0.202	3.01028
0.151	3.34968	0.203	3.00354
0.152	3.34310	0.204	2.99680
0.153	3.33651	0.205	2.99005
0.154	3.32993	0.206	2.98331
0.155	3.32334	0.207	2.97655

Tabelle III/2

$\tilde{\mu}_o$	ν_o	$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.208	2.96980	0.260	2.61352
0.209	2.96304	0.261	2.60656
0.210	2.95628	0.262	2.59960
0.211	2.94951	0.263	2.59264
0.212	2.94275	0.264	2.58567
0.213	2.93597	0.265	2.57870
0.214	2.92920	0.266	2.57173
0.215	2.92242	0.267	2.56475
0.216	2.91564	0.268	2.55776
0.217	2.90885	0.269	2.55077
0.218	2.90206	0.270	2.54378
0.219	2.89527	0.271	2.53679
0.220	2.88847	0.272	2.52978
0.221	2.88167	0.273	2.52278
0.222	2.87486	0.274	2.51577
0.223	2.86806	0.275	2.50875
0.224	2.86125	0.276	2.50173
0.225	2.85443	0.277	2.49471
0.226	2.84761	0.278	2.48768
0.227	2.84079	0.279	2.48065
0.228	2.83396	0.280	2.47362
0.229	2.82713	0.281	2.46657
0.230	2.82030	0.282	2.45953
0.231	2.81346	0.283	2.45248
0.232	2.80662	0.284	2.44542
0.233	2.79978	0.285	2.43837
0.234	2.79293	0.286	2.43130
0.235	2.78608	0.287	2.42423
0.236	2.77922	0.288	2.41716
0.237	2.77236	0.289	2.41008
0.238	2.76550	0.290	2.40300
0.239	2.75863	0.291	2.39591
0.240	2.75176	0.292	2.38882
0.241	2.74489	0.293	2.38173
0.242	2.73801	0.294	2.37463
0.243	2.73113	0.295	2.36752
0.244	2.72424	0.296	2.36041
0.245	2.71735	0.297	2.35329
0.246	2.71046	0.298	2.34617
0.247	2.70356	0.299	2.33905
0.248	2.69666	0.300	2.33192
0.249	2.68975	0.301	2.32478
0.250	2.68284	0.302	2.31764
0.251	2.67593	0.303	2.31050
0.252	2.66901	0.304	2.30335
0.253	2.66209	0.305	2.29620
0.254	2.65516	0.306	2.28904
0.255	2.64823	0.307	2.28187
0.256	2.64130	0.308	2.27470
0.257	2.63436	0.309	2.26753
0.258	2.62741	0.310	2.26035
0.259	2.62047	0.311	2.25317

Tabelle III/2

$\tilde{\mu}_o$	ν_o	$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.312	2.24598	0.364	1.86447
0.313	2.23878	0.365	1.85697
0.314	2.23158	0.366	1.84947
0.315	2.22438	0.367	1.84196
0.316	2.21717	0.368	1.83444
0.317	2.20995	0.369	1.82692
0.318	2.20273	0.370	1.81939
0.319	2.19550	0.371	1.81185
0.320	2.18827	0.372	1.80431
0.321	2.18104	0.373	1.79676
0.322	2.17379	0.374	1.78920
0.323	2.16655	0.375	1.78164
0.324	2.15929	0.376	1.77407
0.325	2.15203	0.377	1.76649
0.326	2.14477	0.378	1.75891
0.327	2.13750	0.379	1.75132
0.328	2.13023	0.380	1.74372
0.329	2.12295	0.381	1.73611
0.330	2.11566	0.382	1.72850
0.331	2.10837	0.383	1.72088
0.332	2.10107	0.384	1.71326
0.333	2.09377	0.385	1.70562
0.334	2.08646	0.386	1.69798
0.335	2.07915	0.387	1.69034
0.336	2.07183	0.388	1.68268
0.337	2.06451	0.389	1.67502
0.338	2.05717	0.390	1.66735
0.339	2.04984	0.391	1.65967
0.340	2.04250	0.392	1.65199
0.341	2.03515	0.393	1.64430
0.342	2.02779	0.394	1.63660
0.343	2.02043	0.395	1.62889
0.344	2.01307	0.396	1.62118
0.345	2.00570	0.397	1.61345
0.346	1.99832	0.398	1.60572
0.347	1.99093	0.399	1.59799
0.348	1.98354	0.400	1.59024
0.349	1.97615	0.401	1.58249
0.350	1.96875	0.402	1.57473
0.351	1.96134	0.403	1.56696
0.352	1.95392	0.404	1.55919
0.353	1.94650	0.405	1.55141
0.354	1.93908	0.406	1.54361
0.355	1.93164	0.407	1.53582
0.356	1.92421	0.408	1.52801
0.357	1.91676	0.409	1.52020
0.358	1.90931	0.410	1.51237
0.359	1.90185	0.411	1.50454
0.360	1.89439	0.412	1.49670
0.361	1.88692	0.413	1.48886
0.362	1.87944	0.414	1.48100
0.363	1.87196	0.415	1.47314

Tabelle III/2

$\tilde{\mu}_o^*$	ν_o
0.414	1.46527
0.417	1.45739
0.418	1.44950
0.419	1.44161
0.420	1.43370
0.421	1.42579
0.422	1.41787
0.423	1.40994
0.424	1.40200
0.425	1.39406
0.426	1.38610
0.427	1.37814
0.428	1.37017
0.429	1.36219
0.430	1.35420
0.431	1.34620
0.432	1.33820
0.433	1.33019
0.434	1.32216
0.435	1.31413
0.436	1.30609
0.437	1.29804
0.438	1.28998
0.439	1.28192
0.440	1.27384
0.441	1.26576
0.442	1.25766
0.443	1.24956
.444	1.24145
0.445	1.23333
0.446	1.22520
0.447	1.21706
0.448	1.20891
0.449	1.20076
0.450	1.19259
0.451	1.18441
0.452	1.17623
0.453	1.16804
0.454	1.15983
0.455	1.15162
0.456	1.14340
0.457	1.13517
0.458	1.12693
0.459	1.11868
0.460	1.11042
0.461	1.10215
0.462	1.09387
0.463	1.08558
0.464	1.07729
0.465	1.06898
0.466	1.06067
0.467	1.05234

$\tilde{\mu}_o^*$	ν_o
0.468	1.04401
0.469	1.03567
0.470	1.02732
0.471	1.01896
0.472	1.01059
0.473	1.00221
0.474	0.99383
0.475	0.98544
0.476	0.97703
0.477	0.96863
0.478	0.96021
0.479	0.95178
0.480	0.94335
0.481	0.93491
0.482	0.92646
0.483	0.91800
0.484	0.90954
0.485	0.90107
0.486	0.89259
0.487	0.88411
0.488	0.87562
0.489	0.86712
0.490	0.85862
0.491	0.85011
0.492	0.84159
0.493	0.83307
0.494	0.82455
0.495	0.81603
0.496	0.80750
0.497	0.79897
0.498	0.79043
0.499	0.78190
0.500	0.77337
0.501	0.76485
0.502	0.75633
0.503	0.74782
0.504	0.73932
0.505	0.73084
0.506	0.72236
0.507	0.71388
0.508	0.70542
0.509	0.69697
0.510	0.68852
0.511	0.68009
0.512	0.67166
0.513	0.66324
0.514	0.65483
0.515	0.64643
0.516	0.63804
0.517	0.62965
0.518	0.62128
0.519	0.61292

Tabelle III/2

$\tilde{\mu}_o$	ν_o
0.520	0.60456
0.521	0.59621
0.522	0.58787
0.523	0.57954
0.524	0.57122
0.525	0.56291
0.526	0.55460
0.527	0.54631
0.528	0.53802
0.529	0.52974
0.530	0.52148
0.531	0.51322
0.532	0.50497
0.533	0.49672
0.534	0.48849
0.535	0.48027
0.536	0.47205
0.537	0.46385
0.538	0.45565
0.539	0.44746
0.540	0.43928
0.541	0.43111
0.542	0.42295
0.543	0.41479
0.544	0.40665
0.545	0.39851
0.546	0.39038
0.547	0.38226
0.548	0.37416
0.549	0.36605
0.550	0.35796
0.551	0.34988
0.552	0.34181
0.553	0.33374
0.554	0.32568
0.555	0.31763
0.556	0.30959
0.557	0.30156
0.558	0.29354
0.559	0.28553
0.560	0.27752
0.561	0.26953
0.562	0.26154
0.563	0.25356
0.564	0.24559
0.565	0.23763
0.566	0.22968
0.567	0.22174
0.568	0.21380
0.569	0.20587
0.570	0.19796
0.571	0.19005
0.572	0.18215
0.573	0.17425
0.574	0.16637
0.575	0.15850
0.576	0.15063
0.577	0.14277
0.578	0.13492
0.579	0.12708
0.580	0.11925
0.581	0.11143
0.582	0.10361
0.583	0.09581
0.584	0.08801
0.585	0.08022
0.586	0.07244
0.587	0.06466
0.588	0.05690
0.589	0.04914
0.590	0.04140
0.591	0.03366
0.592	0.02593
0.593	0.01820
0.594	0.01049
0.595	0.00278

Ist aber $k \geq N$, so gilt wegen (3.71) sowie (3.83) - (3.86)

$$\varepsilon_{N+j} = \varphi_{N+j}\,\varepsilon_{N+j-1} \leq \varphi_N\,\varepsilon_{N+j-1} \leq \varphi_N^j\,\varepsilon_N$$

Dann hat man aber

$$\begin{aligned}
\delta_0 + \cdots + \delta_N + \cdots + \delta_K &= (\,\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \cdots + \varepsilon_K\,)\,\delta_0 \\
&\leq (\,\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{N+j}\,)\,\delta_0 \\
&\leq (\,\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_N^j\,\varepsilon_N\,)\,\delta_0 \\
&= (\,\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N + \frac{\varphi_N}{1-\varphi_N}\,\varepsilon_N\,)\,\delta_0 \qquad \text{wegen (3.77)} \\
&\leq 2\,\delta_0 \qquad \text{wegen (3.78)}
\end{aligned}$$

Damit ist auch der zweite Teil von (3.89) bewiesen.

Der restliche Beweis verläuft nun praktisch wörtlich wie Teil (B) des Beweises von Satz III.7.
Damit ist alles bewiesen. ■

Die Voraussetzungen von Satz III.8 lassen sich für gegebene Werte von $\tilde{\mu}_0$ und ν_0 wieder ganz einfach überprüfen, wenn man sie in Form eines Funktionsunterprogrammes schreibt, das den Wert ".TRUE." liefert, wenn die Voraussetzungen für diese $\tilde{\mu}_0$- ν_0 -Kombination erfüllt sind, d.h. die Konvergenz gesichert ist, und anderenfalls den Wert ".FALSE." annimmt. Bei Verwendung des nachstehend angegebenen Fortran-Programmes sollte der Anwender N = 10 setzen.

```
      LOGICAL FUNCTION KOVHM(MUEØ,NUEØ,N)
      REAL MUEØ,NUEØ,EPSØ,MUE1,NUE1,EPS1
      REAL PSI,PHI,SE,S,A,B,C
      INTEGER N,K
      EPSØ=1.Ø
      SE=Ø.Ø
      IF (MUEØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      IF (NUEØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      K=Ø
   1Ø CONTINUE
      IF (MUEØ.GE.1.Ø) GO TO 2Ø
      A=1.Ø-MUEØ
      B=1.Ø-Ø.5*MUEØ
      PSI=MUEØ*MUEØ/4.Ø
      PSI=PSI/(A*B)
      PSI=PSI+NUEØ/(6.Ø*A)
      C=Ø.5*MUEØ*PSI/A
      IF (C.GE.1.Ø) GO TO 2Ø
      C=1.Ø-C
      PHI=PSI/C
      MUE1=MUEØ*PHI/A
      NUE1=NUEØ*PHI PHI/A
      EPS1=PHI*EPSØ
      SE=SE+EPSØ
      IF (SE.GT.2.Ø) GO TO 15
      IF (MUE1.GT.MUEØ) GO TO 15
      IF (NUE1.GT.NUEØ) GO TO 15
```

```
      IF (PHI.GE.1.Ø) GO TO 15
      S=SE+EPSØ*PHI/(1.Ø-PHI)
      IF (S.GT.2.Ø) GO TO 15
      KOVHM=.TRUE.
      RETURN
   15 K=K+1
      IF (K.GE.N+1) GO TO 2Ø
      MUEØ=MUE1
      NUEØ=NUE1
      EPSØ=EPS1
      GO TO 1Ø
   2Ø CONTINUE
      KOVHM=.FALSE.
      RETURN
      END
```

Der durch Satz III.8 für das Halley-Verfahren garantierte Konvergenzbereich ist in Abbildung III/6 auf Seite 111 graphisch dargestellt. In Abbildung III/7 auf Seite 115 wird er mit dem durch Satz III.1 für N = 10 garantierten Konvergenzbereich verglichen. Man entnimmt dieser Abbildung, daß die Aussagen beider Sätze sich insofern ergänzen, als Satz III.8 für $\tilde{\mu}_0$-Werte bis etwa 0.57 und Satz III.1 für größere $\tilde{\mu}_0$-Werte die bessere Aussage liefert. In Abbildung III/8 auf Seite 116 schließlich ist dargestellt, wie sich die Aussagen von Satz III.8 mit wachsendem N ändern. Für N = 0 erhält man die Aussage von Satz III.7. Insbesondere kann man gut erkennen, daß sich der von Satz III.7 garantierte Konvergenzbereich des Halley-Verfahrens allein durch die Umformulierung dieses Satzes zu dem mit Hilfe der Methode der retardierten Induktion bewiesenen Satz III.8 deutlich vergrößern läßt. Die Tabelle III/2 auf Seite 117 - 122 gibt in Form von Zahlen einen Überblick über die Kombinationen von $\tilde{\mu}_0$- und ν_0-Werten, für die die Voraussetzungen von Satz III.8 erfüllt sind.
Beim Betrachten der Abbildungen III/1 (S. 88) sowie III/4 (S. 108), die den Konvergenzbereich darstellen, der sich aus den Beweisideen der Sätze III.1 bzw. III.7 mit Hilfe der "klassischen" Induktionsmethode ergibt, wird dem aufmerksamen Beobachter vielleicht ein Knick in der Begrenzungskurve des Konvergenzbereiches an der Stelle $\tilde{\mu}_0 = 0.5$ aufgefallen sein. Interessant ist nun, daß dieser völlig unverständliche Knick in der Begrenzungskurve verschwindet, wenn man sich statt der "klassischen" Induktionsmethode der Methode der retardierten Induktion beim Beweis dieser Sätze bedient. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abbildung III/2 auf Seite 89 und Abbildung III/6 auf Seite 114 dargestellt. Das "Verschwinden dieses unverständlichen Knickes" aus der Begrenzungskurve der Konvergenzbereiche könnte man geradezu werten als "anschaulichen" Beweis dafür, daß die Methode der retardierten Induktion für die hier betrachteten Sätze die natürlichere und angemessenere Beweismethode ist.

Es sollen nun noch einige Sätze zum Halley-Verfahren angegeben werden, die sich in ihren Voraussetzungen lediglich auf den ersten Newton-Schritt beziehen, wodurch sich die Überprüfung dieser Voraussetzungen im konkreten Anwendungsfall ganz besonders einfach gestaltet. Auch hier war Döring wegweisend mit [1]. Auf diese Arbeit geht der folgende Satz III.9 in Beweisidee und Methode zurück. Nachdem auch für diesen Satz nochmals untersucht wird, welche Verbesserungen seiner Aussagen sich allein dadurch erzielen lassen, daß man sich bei seinem

Beweis der Methode der retardierten Induktion bedient, wird schließlich das Halley-Verfahren noch in einigen Sätzen als gestörtes Newton- bzw. gestörtes gemischtes Newton-Verfahren betrachtet, eine Methode, die sich in Kapitel II in Bezug auf das Tschebyscheff-Verfahren als sehr erfolgreich erwiesen hatte.

Satz III.9: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \delta_0$$

$$S_0 := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq R\,\delta_0\} \subset M \quad \text{für ein festes } R \geq 2$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F'''(x)\| \leq K_3$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \delta_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\chi_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$$

Überdies gelte:

$$(3.90) \qquad \frac{\mu_0}{\left[1 - \dfrac{\mu_0}{1 - \frac{1}{2}\mu_0}\right]^2 (1 - \tfrac{1}{2}\mu_0)^2} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_0}{1 - \frac{1}{2}\mu_0} + \tfrac{1}{4}\mu_0^2 \right\} \leq \mu_0$$

$$(3.91) \qquad \frac{\chi_0}{\left[1 - \dfrac{\mu_0}{1 - \frac{1}{2}\mu_0}\right]^3 (1 - \tfrac{1}{2}\mu_0)^4} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_0}{1 - \frac{1}{2}\mu_0} + \tfrac{1}{4}\mu_0^2 \right\}^2 \leq \chi_0$$

$$(3.92) \qquad \frac{R}{\left[1 - \dfrac{\mu_0}{1 - \frac{1}{2}\mu_0}\right] (1 - \tfrac{1}{2}\mu_0)^2} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_0}{1 - \frac{1}{2}\mu_0} + \tfrac{1}{4}\mu_0^2 \right\} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_0} \leq R$$

Dann gilt:

(3.93) Die durch x_0 und

$$x_{n+1} := x_n - \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_n)\right]^{-1} F''(x_n)\left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)\right]^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)$$

rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$.

(3.94) Es gilt $F(x^*) = \theta$.

Beweis: Es werden zunächst die durch

(3.95) β_0, μ_0, χ_0, δ_0 sowie

$$(3.96)\qquad \beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1 - \dfrac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}}$$

$$(3.97)\qquad \varepsilon_{n+1} := \frac{1}{\left[1 - \dfrac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right](1 - \frac{1}{2}\mu_n)^2} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \frac{1}{4}\mu_n^2 \right\} \varepsilon_n$$

$$(3.98)\qquad \mu_{n+1} := \frac{\mu_n}{\left[1 - \dfrac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right]^2 (1 - \frac{1}{2}\mu_n)^2} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \frac{1}{4}\mu_n^2 \right\}$$

$$(3.99)\qquad \chi_{n+1} := \frac{\chi_n}{\left[1 - \dfrac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right]^3 (1 - \frac{1}{2}\mu_n)^4} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \frac{1}{4}\mu_n^2 \right\}^2$$

rekursiv definierten Folgen $\{\beta_n\}, \{\varepsilon_n\}, \{\mu_n\}, \{\chi_n\}$ eingeführt.
Es wird zunächst gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (3.95) - (3.99) definierten Zahlen β_n, ε_n, μ_n, χ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, sowie

$$(3.100)\qquad \mu_n \geq 0 \quad , \quad \mu_{n+1} \leq \mu_n \quad , \quad \mu_n = \beta_n K_2 \varepsilon_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(3.101)\qquad \varepsilon_n \geq 0 \quad , \quad \varepsilon_{n+1} \leq \alpha\, \varepsilon_n \quad \text{mit} \quad \alpha < 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(3.102)\qquad \beta_n \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(3.103)\qquad \chi_n \geq 0 \quad , \quad \chi_{n+1} \leq \chi_n \quad , \quad \chi_n = \beta_n K_3 \varepsilon_n^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Denn: Die Rekursionsausdrücke (3.96) - (3.99) sind für $0 \leq \mu_n \leq \frac{1}{2}$ sowie χ_n, β_n, $\varepsilon_n \geq 0$ positiv oder Null. Ebenso sind die Rekursionsausdrücke (3.98) und (3.99) für $0 \leq \mu_n \leq \frac{1}{2}$, $\chi_n \geq 0$ in μ_n, χ_n monoton fallend. Da wegen (3.90), (3.91) gilt $\mu_1 \leq \mu_0$, $\chi_1 \leq \chi_0$, erhält man also:

$$\mu_{n+1} \leq \mu_n \quad ; \quad \chi_{n+1} \leq \chi_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Da man noch leicht $\mu_n = \beta_n K_2 \varepsilon_n$, $\chi_n = \beta_n K_3 \varepsilon_n^2$ nachprüft, folgt (3.100), (3.103). Hieraus folgt sofort (3.102) und $\varepsilon_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ebenso erhält man zusammen mit (3.92)

$$(3.104)\qquad \frac{R}{\left[1 - \dfrac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right](1 - \frac{1}{2}\mu_n)^2} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \frac{1}{4}\mu_n^2 \right\} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} \leq$$

$$\leq R \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

und

$$\frac{1}{\left[1 - \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right](1 - \frac{1}{2}\mu_n)^2} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \frac{1}{4}\mu_n^2 \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\left[1 - \frac{\mu_o}{1 - \frac{1}{2}\mu_o}\right](1 - \frac{1}{2}\mu_o)^2} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_o}{1 - \frac{1}{2}\mu_o} + \frac{1}{4}\mu_o^2 \right\} =: \alpha \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

wobei aus (3.104) notwendigerweise $\alpha < 1$ folgt, da $R\alpha + 1 \leq R$ gelten muß. Unter Beachtung von (3.97) ist dann aber

$$\mathcal{S}_{n+1} \leq \alpha\, \mathcal{S}_n$$

Somit gilt auch (3.101).

Für den weiteren Beweis werden nun folgende Bezeichnungen verwendet:

$F_n := F(x_n)$; $F_n' := F'(x_n)$; $F_n'^{-1} := [F'(x_n)]^{-1}$; $F_n'' := F''(x_n)$

$c_n := F_n'^{-1} F_n$; $d_n := x_{n+1} - x_n$

$S_n := \{x \in X : \|x - x_n\| \leq R\,\mathcal{S}_n\}$; $S_{-1} := S_o$

Es wird nun gezeigt: Die Folge $\{x_n\}$ existiert und es gilt $x_n \in S_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierfür genügt es durch vollständige Induktion nach n zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$(\text{Ind } 1)_n$ $F_n'^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$\|F_n'^{-1}\| \leq \beta_n$

$[I - \frac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F_n]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$$\|[I - \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} F_n'' F_n'^{-1} F_n]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}$$

$(\text{Ind } 2)_n$ $\|c_n\| \leq \mathcal{S}_n$

$(\text{Ind } 3)_n$ $S_n \subset S_{n-1}$

Induktionsverankerung: Für n = 0 sind die Induktionsbehauptungen nach den Voraussetzungen des Satzes richtig.

Schluß von n auf n+1: Es ist $x_{n+1} = x_n + d_n$. Wegen

(3.105) $\qquad F_n + F_n' c_n = \theta$

(3.106) $\qquad F_n + F_n' d_n + \frac{1}{2} F_n'' c_n d_n = \theta$

sowie $(\text{Ind } 1)_n$ - $(\text{Ind } 3)_n$ gilt

$$(3.107) \qquad \|d_n\| \leq \frac{\mathcal{S}_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} \leq R\,\mathcal{S}_n$$

unter Beachtung von (3.104). Also gilt

$\|x_{n+1} - x_n\| \le R\,\mathcal{S}_n$ d.h. $x_{n+1} \in S_n \subset S_o$

Somit existiert $F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']$ mit

$$\|F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']\| \le \beta_n K_2 \|d_n\| \le \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} < 1$$

wegen (3.100) und $\mu_o \le \frac{1}{2}$. Dann existiert nach dem Banach-Lemma (Satz I.1):

$$[I - F_n'^{-1}[F_n' - F_{n+1}']]^{-1} F_n'^{-1} = F_{n+1}'^{-1}$$

mit

$$\|F_{n+1}'^{-1}\| \le \frac{\beta_n}{1 - \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}} = \beta_{n+1} \qquad \text{nach (3.96)}$$

Weiter ist unter Beachtung von (3.105), (3.106) sowie (3.107)

(3.108)
$$\begin{aligned}\|F_{n+1}\| &= \|F_{n+1} - F_n - F_n' d_n - \tfrac{1}{2} F_n'' d_n c_n\| \\ &\le \|F_{n+1} - F_n - F_n' d_n - \tfrac{1}{2} F_n'' d_n^{(2)}\| + \tfrac{1}{2} K_2 \|d_n\| \|d_n - c_n\| \\ &\le \tfrac{1}{6} K_3 \|d_n\|^3 + \tfrac{1}{2} K_2 \|d_n\| \tfrac{1}{2} \beta_n K_2 \mathcal{S}_n \|d_n\| \\ &\le \frac{\frac{1}{6} K_3 \mathcal{S}_n^3}{(1 - \frac{1}{2}\mu_n)^3} + \frac{\frac{1}{4}\mu_n K_2 \mathcal{S}_n^2}{(1 - \frac{1}{2}\mu_n)^2}\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\|c_{n+1}\| &\le \|F_{n+1}^{-1}\| \|F_{n+1}\| \\ &\le \left\{ \frac{\frac{1}{6} \chi_n}{\left[1 - \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right](1 - \frac{1}{2}\mu_n)^3} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\frac{1}{4}\mu_n^2}{\left[1 - \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right](1 - \frac{1}{2}\mu_n)^2} \right\} \mathcal{S}_n \\ &= \mathcal{S}_{n+1} \qquad \text{nach (3.97)}\end{aligned}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 2)_{n+1}$. Andererseits hat man nun

$$\|F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}'' F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}\| \le \beta_{n+1} K_2 \mathcal{S}_{n+1} = \mu_{n+1}$$

woraus mit (3.100) und dem Banach-Lemma (Satz I.1) die Existenz von

$$[I - \tfrac{1}{2} F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}'' F_{n+1}'^{-1} F_{n+1}]^{-1}$$

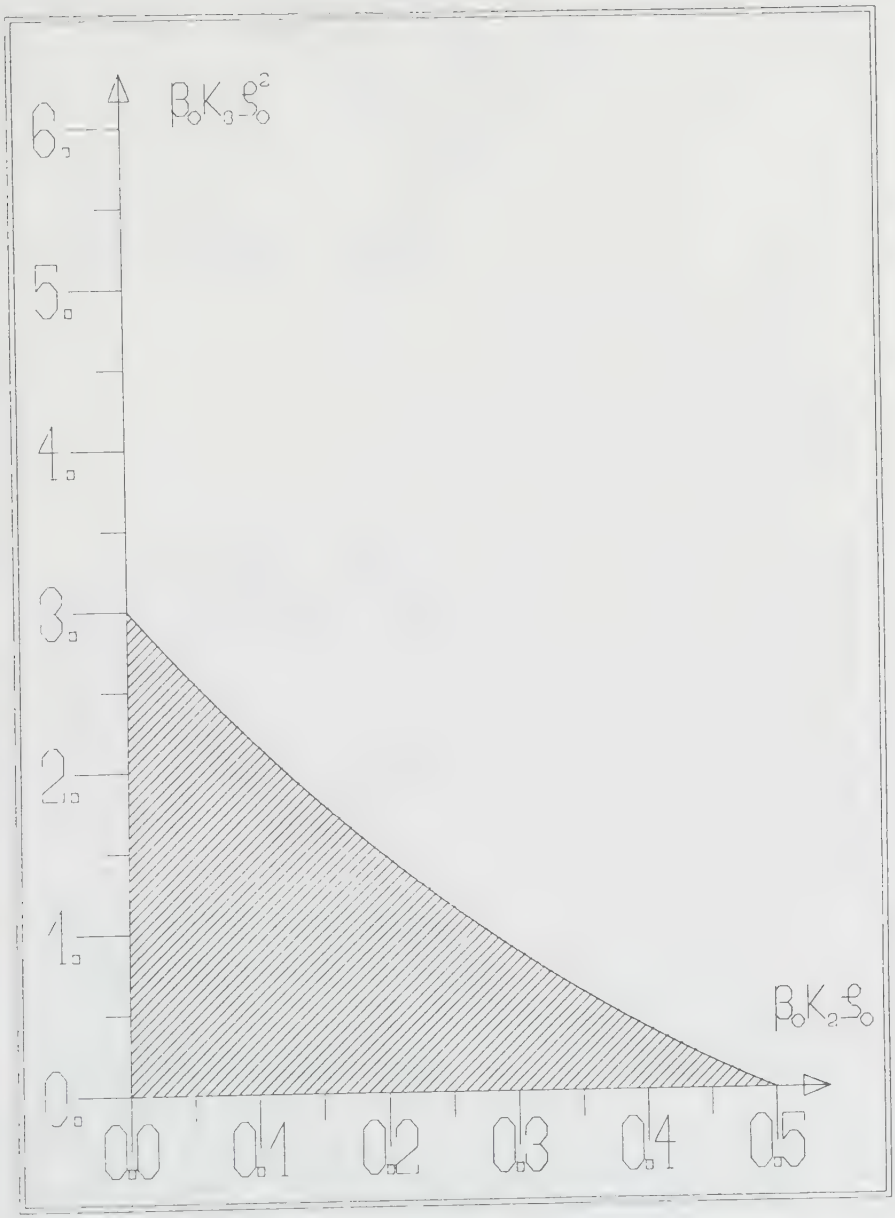


Abbildung III/9

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \xi_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_3 \xi_0^2$, für die Satz III.9 die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 ist schraffiert.

folgt. Zusammen mit den bereits bewiesenen Aussagen folgt hieraus $(\text{Ind } 1)_{n+1}$. Schließlich gilt

$$x \in S_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \| x - x_{n+1} \| \leq R\, \varepsilon_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \| x - x_n \| \leq \| x - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - x_n \|$$

$$\leq R\, \varepsilon_{n+1} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\, \varepsilon_n \qquad \text{nach (3.107)}$$

$$\leq \left\{ \frac{\left[\frac{\frac{1}{6}\chi_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \frac{1}{4}\mu_n^2 \right]}{\left[1 - \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} \right] (1 - \frac{1}{2}\mu_n)^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} \right\} \varepsilon_n$$

$$\leq R\, \varepsilon_n \qquad \text{nach (3.104)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 3)_{n+1}$.
Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Nach (3.101) gilt nun

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$$

Wegen $R < \infty$ geht dann auch der Radius der Kugeln S_n gegen Null. Da $x_k \in S_n \; \forall k \geq n$ nach $(\text{Ind } 3)_n$, bilden die $\{x_n\}$ also eine Cauchy-Folge. Da X als Banach-Raum vollständig und S_0 abgeschlossen ist, gibt es ein $x^* \in S_0$ mit $x_n \to x^*$. Damit ist (3.93) bewiesen. Aus (3.108) und $\mu_n \leq \frac{1}{2}$ wegen (3.100) folgt aus $\varepsilon_n \to 0$ schließlich $\| F_n \| \to 0$. Wegen der Stetigkeit von F und der Stetigkeit der Norm folgt hieraus $F(x^*) = \theta$, d.h. (3.94). Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Anmerkung: Wie schon in Kapitel II für den analogen Satz über das Tschebyscheff-Verfahren ausgeführt wurde, so erhält man auch hier für $R \leq 2$ und $\mu_0 < \frac{1}{2}$ die Existenz und gleichmäßige Beschränktheit der $[F'(x)]^{-1}$ für alle $x \in S_0$. Zusammen mit dem folgenden Satz folgt hieraus dann die kubische Konvergenz des Halley-Verfahrens. Die in der Originalarbeit von Döring [1] bewiesene schwache Konvergenz von der Ordnung drei hätte sich unter den Voraussetzungen des dortigen Satzes also leicht verschärfen lassen.

In der Abbildung III/9 auf Seite 129 ist der durch Satz III.9 garantierte Konvergenzbereich des Halley-Verfahrens graphisch dargestellt. Wie dies schon für Satz III.7 geschehen ist, so soll auch Satz III.9 nun so umgeformt werden, daß sich sein Beweis mit Hilfe der Methode der retardierten Induktion führen läßt, um auch hier die dadurch erzielbaren Verbesserungen der Aussagen eines Satzes demonstrieren zu können. Wenn man die im Anschluß an Satz III.7 gemachten Ausführungen sinngemäß auf Satz III.9 anwendet, so geht dieser über in die Form von

Satz III.10: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzeirbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq \beta_0 \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \leq \varepsilon_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \| x - x_0 \| \leq R\, \varepsilon_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$$
$$\sup_{x \in S_0} \|F'''(x)\| \leq K_3$$
$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \varepsilon_0 \leq \tfrac{1}{2}$$
$$\chi_0 := \beta_0 K_3 \varepsilon_0^2$$

Überdies gelte:
Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch

(3.109) μ_0, χ_0 sowie $\lambda_0 := 1$ und

(3.110) $$\mu_{n+1} := \frac{\mu_n}{\left[1 - \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right]^2 (1 - \frac{1}{2}\mu_n)^2} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \frac{1}{4}\mu_n^2 \right\}$$

(3.111) $$\chi_{n+1} := \frac{\chi_n}{\left[1 - \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right]^3 (1 - \frac{1}{2}\mu_n)^4} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \frac{1}{4}\mu_n^2 \right\}^2$$

(3.112) $\lambda_{n+1} := \alpha_n \lambda_n$ mit

$$\alpha_n := \frac{1}{\left[1 - \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}\right] (1 - \frac{1}{2}\mu_n)^2} \left\{ \frac{\frac{1}{6}\chi_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \frac{1}{4}\mu_n^2 \right\}$$

(3.113) $$\varepsilon_n := \frac{\lambda_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n}$$

rekursiv definierten Zahlen μ_n, χ_n, λ_n, α_n, ε_n für $n \leq N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

(3.114) $$\tfrac{1}{2}\mu_n < 1 \quad ; \quad \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} < 1 \qquad \forall\, n \leq N$$

(3.115) $$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n \leq R \qquad \forall\, n \leq N$$

(3.116) $$\alpha_N < 1$$

(3.117) $$\mu_{N+1} \leq \mu_N$$

(3.118) $$\chi_{N+1} \leq \chi_N$$

(3.119) $$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_N + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_N} \frac{\alpha_N}{1 - \alpha_N} \lambda_N \leq R$$

Dann gelten die Behauptungen (3.93), (3.94) von Satz III.9.

Beweis: Alle für den Beweis von Satz III.9 wichtigen Bezeihungen werden durch die Voraussetzungen garantiert. Ebenso kann man für $n \geq N$ den Induktionsbeweis wie in Satz III.9 führen. Man zeigt nämlich leicht, daß für $n \geq N$ die μ_n, $\varkappa_n$, ϑ_n, α_n monoton fallen. Lediglich $x_{n+1} \in S_o$ muß man hier etwas anders beweisen: Man beachtet, daß

$$\| x_{k+1} - x_k \| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_k} \varepsilon_k \quad ; \quad \varepsilon_k = \vartheta_k \varepsilon_o$$

sowie

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_{N+i}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_N} \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

$$\vartheta_{N+i} = \alpha_{N+i-1}\vartheta_{N+i-1} \leq \alpha_N \vartheta_{N+i-1} \leq \alpha_N^i \vartheta_N$$

Dann erhält man

$$\| x_{n+1} - x_o \| \leq \| x_{n+1} - x_n \| + \cdots + \| x_1 - x_o \|$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} \varepsilon_n + \cdots + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_o} \varepsilon_o$$

$$= \left[\frac{\vartheta_n}{1 - \frac{1}{2}\mu_n} + \cdots + \frac{\vartheta_o}{1 - \frac{1}{2}\mu_o} \right] \varepsilon_o$$

$$= (\varepsilon_n + \cdots + \varepsilon_o) \varepsilon_o \leq R \varepsilon_o \quad \text{nach (3.115) für } n \leq N$$

$$\leq (\varepsilon_o + \cdots + \varepsilon_N + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{N+i}) \varepsilon_o$$

$$= (\varepsilon_o + \cdots + \varepsilon_N + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\vartheta_{N+i}}{1 - \frac{1}{2}\mu_{N+i}})$$

$$\leq (\varepsilon_o + \cdots + \varepsilon_N + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_N} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_N^i \vartheta_N) \varepsilon_o$$

$$\leq (\varepsilon_o + \cdots + \varepsilon_N + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_N} \frac{\alpha_N}{1 - \alpha_N} \vartheta_N) \quad \text{wegen (3.116)}$$

$$\leq R \varepsilon_o \qquad \text{wegen (3.119) für } n \geq N$$

Damit ist dann alles bewiesen. ■

Man sieht leicht, daß die Voraussetzungen von Satz III.10 für $N = 0$ mit denen von Satz III.9 identisch sind. Einzig für die dortige Bedingung (3.92) ist dies vielleicht nicht unmittelbar einsichtig. Aus (3.119) und (3.113) folgt aber mit (3.112) und (3.109) für $N = 0$:

$$\varepsilon_o + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_o} \frac{\alpha_o}{1 - \alpha_o} \vartheta_o \leq R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_o} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mu_o} \frac{\alpha_o}{1 - \alpha_o} \leq R$$

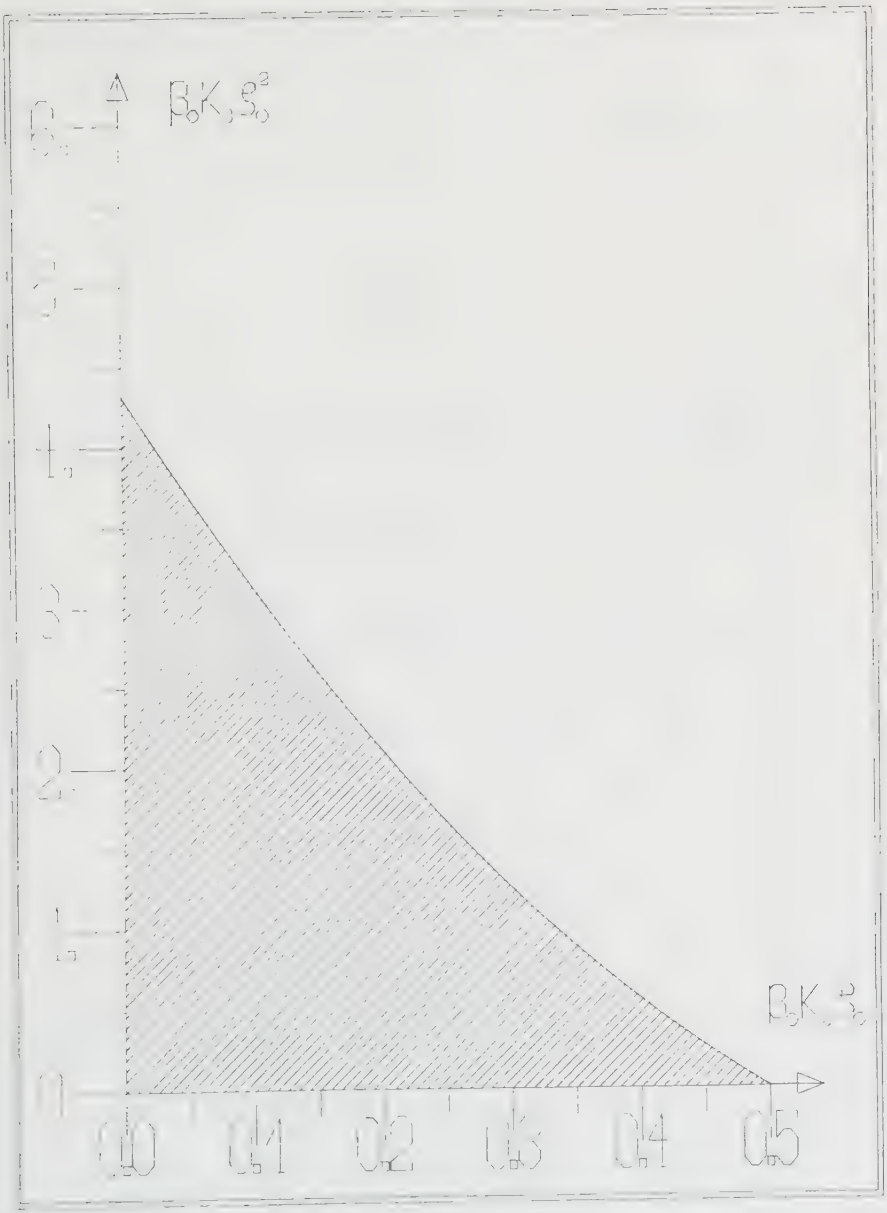


Abbildung III/10

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \delta_0$ und $\nu_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$, für die Satz III.10 für N = 10 die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von μ_0 und ν_0 ist schraffiert.

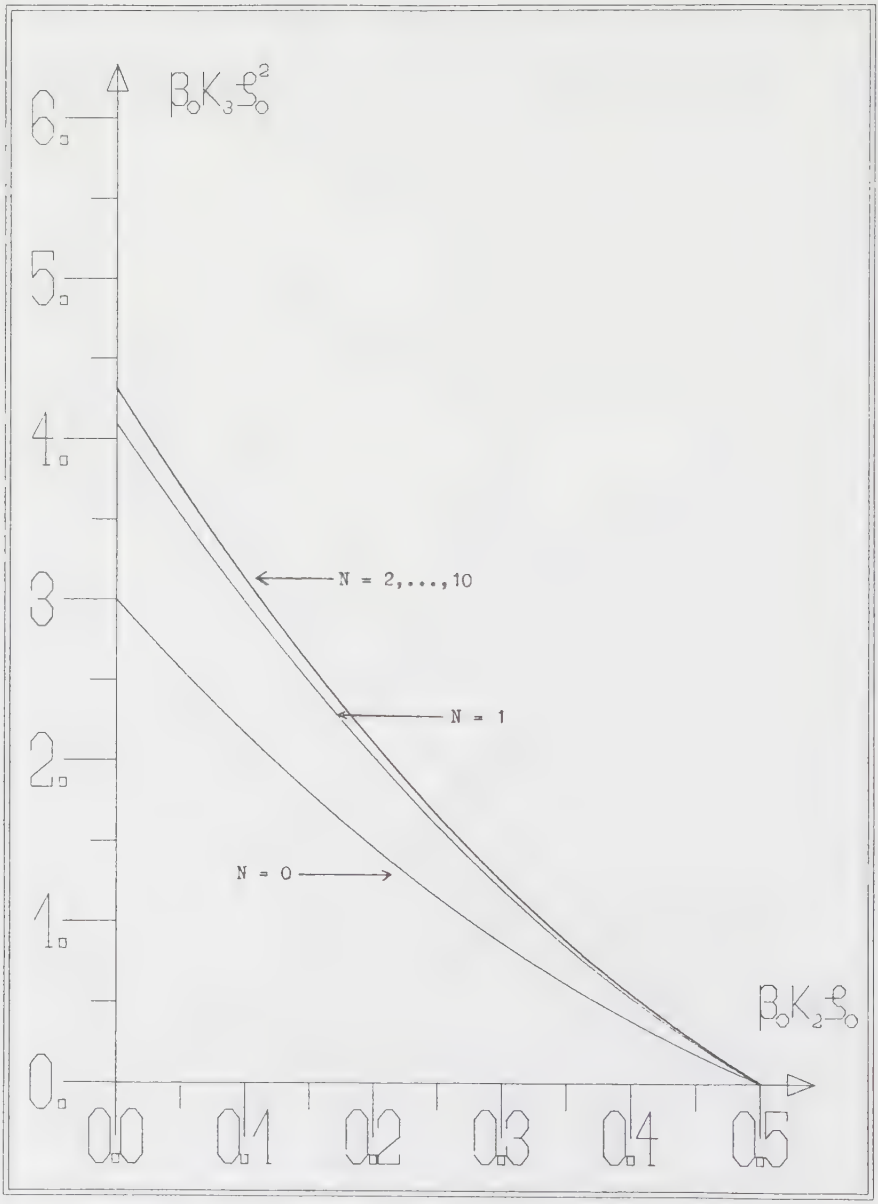


Abbildung III/11

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \varepsilon_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_3 \varepsilon_0^2$, für die Satz III.10 für verschiedene Werte von N die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Die zulässigen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 liegen zwischen den jeweiligen Kurven und den Koordinatenachsen.

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-\frac{1}{2}\mu_0}\,\frac{1}{1-\alpha_0} \leq R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-\frac{1}{2}\mu_0} \leq R - R\alpha_0$$

$$\Rightarrow \quad R\alpha_0 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}\mu_0} \leq R$$

Setzt man hier den Ausdruck für α_0 nach (3.112) ein, so erhält man gerade (3.92).

Die Überprüfung der Voraussetzungen von Satz III.10 gestaltet sich sehr einfach, wenn man das folgende Fortran-Funktionsunterprogramm verwendet, das den Wert ".TRUE." liefert, wenn die Bedingungen des Satzes erfüllt sind und anderenfalls den Wert ".FALSE." annimmt.

```
      LOGICAL FUNCTION KOVHSD(MUEØ,CHIØ,N)
      REAL MUEØ,CHIØ,LAMØ,MUE1,CHI1,LAM1
      REAL S,SE,EPS,ALF,A,B,C
      INTEGER N,K
      LAMØ=1.Ø
      SE=Ø.Ø
      IF (MUEØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      IF (CHIØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      K=Ø
   1Ø CONTINUE
      IF (MUEØ.GE.Ø.5) GO TO 2Ø
      A=1.Ø-Ø.5*MUEØ
      EPS=LAMØ/A
      B=1.Ø-MUEØ/A
      IF (B.LE.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      C=CHIØ/(6.Ø A)+MUEØ*MUEØ/4.Ø
      ALF=C/(B*A*A)
      MUE1=C*MUEØ/(B*B*A*A)
      CHI1=C*C*CHIØ/(B*B*B*A*A*A*A)
      LAM1=ALF*LAMØ
      SE=SE+EPS
      IF (SE.GT.2.Ø) GO TO 2Ø
      IF (ALF.GE.1.Ø) GO TO 15
      IF (MUE1.GT.MUEØ) GO TO 15
      IF (CHI1.GT.CHIØ) GO TO 15
      S=SE+ALF*LAMØ/(A*(1.Ø-ALF))
      IF (S.GT.2.Ø) GO TO 15
      KOVHSD=.TRUE.
      RETURN
   15 K=K+1
      IF (K.GE.N+1) GO TO 2Ø
      MUEØ=MUE1
      CHIØ=CHI1
      LAMØ=LAM1
      GO TO 1Ø
   20 CONTINUE
      KOVHSD=.FALSE.
      RETURN
      END
```

Der durch Satz III.10 garantierte Konvergenzbereich des Halley-Verfahrens ist in Abbildung III/10 auf Seite 133 graphisch dargestellt. Ein Vergleich mit dem in Abbildung III/9 auf Seite 129 dargestellten Konvergenzbereich nach Satz III.9 läßt auch hier die Verbesserungen der Aussage eines Satzes deutlich werden, die sich allein durch die Verwendung der Methode der retardierten Induktion erreichen lassen. Dies geht auch aus Abbildung III/11 auf Seite 134 hervor, in der dargestellt ist, wie sich der von Satz III.10 gesicherte Konvergenzbereich des Halley-Verfahrens in Abhängigkeit des Parameters N der retardierten Induktion ändert. Für N = 0 erhält man dabei die Aussagen von Satz III.9.

Der folgende Satz III.11 untersucht die Konvergenzordnung des Halley-Verfahrens.

Satz III.11: Sei X ein Banach-Raum und $S \subset X$ offen und konvex. $F: S \to X$ sei auf S dreimal stetig Fréchet-differenzierbar mit

$$\sup_{x \in S} \| F''(x) \| \leq K_2 \quad ; \quad \sup_{x \in S} \| F'''(x) \| \leq K_3$$

Die durch $x_0 \in S$ und

$$x_{n+1} := x_n - \left[I - \tfrac{1}{2} \left[F'(x_n) \right]^{-1} F''(x_n) \left[F'(x_n) \right]^{-1} F(x_n) \right]^{-1} \left[F'(x_n) \right]^{-1} F(x_n)$$

rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiere und es gelte $x_n \in S \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$ und $F(x^*) = \theta$.

Die Inversen $\left[F'(x_n) \right]^{-1}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt und es gelte $\tfrac{1}{2} \| \left[F'(x_n) \right]^{-1} \| K_2 \| \left[F'(x_n) \right]^{-1} F(x_n) \| < 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $\{x_n\}$ von der Ordnung 3.

Beweis: Es ist

$$F(x_n) + F'(x_n)\, c_n = \theta \tag{3.120}$$

$$F(x_n) + F'(x_n)\, d_n + \tfrac{1}{2} F''(x_n)\, c_n\, d_n = \theta \tag{3.121}$$

mit

$$c_n := - \left[F'(x_n) \right]^{-1} F(x_n) \tag{3.122}$$

$$d_n := x_{n+1} - x_n = \left[I + \tfrac{1}{2} \left[F'(x_n) \right]^{-1} F''(x_n)\, c_n \right]^{-1} c_n \tag{3.123}$$

Also:

$$\begin{aligned} \| x^* - x_{n+1} \| &= \| x^* - x_n - d_n \| \\ &= \| \left[I + \tfrac{1}{2} \left[F'(x_n) \right]^{-1} F''(x_n)\, c_n \right]^{-1} \{ \left[I + \tfrac{1}{2} \left[F'(x_n) \right]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot F''(x_n)\, c_n \right] (x^* - x_n) - c_n \| \\ &\leq \| \left[I + \tfrac{1}{2} \left[F'(x_n) \right]^{-1} F''(x_n)\, c_n \right]^{-1} \| \cdot \| \left[F'(x_n) \right]^{-1} \| \cdot \\ &\quad \cdot \| F(x_n) + F'(x_n)\, d_n^* + \tfrac{1}{2} F''(x_n)\, c_n\, d_n^* - F(x^*) \| \\ &\quad \text{mit } d_n^* := x^* - x_n \text{ und } F(x^*) = \theta \\ &\leq \| \left[I + \tfrac{1}{2} \left[F'(x_n) \right]^{-1} F''(x_n)\, c_n \right]^{-1} \| \cdot \| \left[F'(x_n) \right]^{-1} \| \cdot \\ &\quad \cdot \{ \| F(x_n) + F'(x_n)\, d_n^* + \tfrac{1}{2} F''(x_n)\, d_n^{*(2)} - F(x^*) \| + \\ &\quad + \| \tfrac{1}{2} F''(x_n)\, c_n\, (d_n^* - c_n) \| \} \\ &= \frac{\| \left[F'(x_n) \right]^{-1} \|}{1 - \tfrac{1}{2} \| \left[F'(x_n) \right]^{-1} \| \; K_2 \| c_n \|} \left\{ \tfrac{1}{6} K_3 \| d_n^* \|^3 + \right. \end{aligned} \tag{3.124}$$

$$+ \tfrac{1}{2} K_2 \| c_n \| \| d_n^* - c_n \| \}$$

Weiter:

$$(3.125) \quad \| d_n^* - c_n \| = \| d_n^* + [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \|$$
$$\leq \| [F'(x_n)]^{-1} \| \| F(x_n) + F'(x_n)\, d_n^* - F(x^*) \|$$
$$\leq \| [F'(x_n)]^{-1} \| \tfrac{1}{2} K_2 \| d_n^* \|^2$$

$$(3.126) \quad \| c_n \| \leq \| c_n - d_n^* \| + \| d_n^* \|$$
$$\leq \| [F'(x_n)]^{-1} \| \tfrac{1}{2} K_2 \| d_n^* \|^2 + \| d_n^* \|$$

Aus (3.124) - (3.126) folgt also:

$$(3.127) \quad \| x^* - x_{n+1} \| \leq \frac{\| [F'(x_n)]^{-1} \|}{1 - \tfrac{1}{2} \| [F'(x_n)]^{-1} \| K_2 \| c_n \|} \left\{ \tfrac{1}{6} K_3 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{8} K_2^3 \| [F'(x_n)]^{-1} \|^2 \| d_n^* \| + \tfrac{1}{4} K_2^2 \| [F'(x_n)]^{-1} \| \right\} \cdot$$
$$\cdot \| x^* - x_n \|^3$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes folgt hieraus die Konvergenzordnung 3. ■

Die folgenden Sätze werden das Halley-Verfahren als gestörtes Newton bzw. gestörtes gemischtes Newton-Verfahren behandeln, so wie dies in Kapitel II in Bezug auf das Tschebyscheff-Verfahren geschehen ist. Die dortigen Ausführungen gelten daher sinngemäß auch hier.

Satz III.12: Sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen und $S \subset M$ konvex. Sei $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist mit

$$\sup_{x \in S} \| F''(x) \| \leq K_2$$

Weiter seien

$$N(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x)$$
$$H(x) := x - \left[I - \tfrac{1}{2} [F'(x)]^{-1} F''(x) [F'(x)]^{-1} F(x) \right]^{-1} [F'(x)]^{-1} F(x)$$
$$\gamma(x) := \| [F'(x)]^{-1} F(x) \|$$
$$\beta(x) := \| [F'(x)]^{-1} \|$$
$$\delta(x) := \| [F'(x)]^{-1} \| \| F(x) \|$$

Es seien nun x, $x + \Delta x \in S$ und $[F'(x)]^{-1}$ sowie $[I - \tfrac{1}{2} [F'(x)]^{-1} F''(x) \cdot$ $\cdot [F'(x)]^{-1} F(x)]^{-1}$ existieren und sind beschränkt und es gelte

$$\beta(x) K_2 \| \Delta x \| < 1$$

und

$$\tfrac{1}{2} \frac{\beta(x) K_2 \delta(x) + (1 + \tfrac{1}{2} \beta(x) K_2 \| \Delta x \|) \beta(x) K_2 \| \Delta x \|}{(1 - \beta(x) K_2 \| \Delta x \|)^2} < 1$$

Dann gilt:

$$\| H(x + \Delta x) - N(x + \Delta x) \| \leq$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,\frac{\beta(x)K_2\,\mathcal{S}(x) + \left(1+\frac{1}{2}\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)\beta(x)K_2\|\Delta x\|}{\left(1-\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)^3}}{1-\frac{1}{2}\,\frac{\beta(x)K_2\,\mathcal{S}(x) + \left(1+\frac{1}{2}\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)\beta(x)K_2\|\Delta x\|}{\left(1-\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)^2}} *$$

$$*\left\{\mathcal{S}(x) + \left(1+\frac{1}{2}\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)\|\Delta x\|\right\}$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
\|H(x) - N(x)\| &= \|x - [I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1}F''(x)[F'(x)]^{-1}F(x)]^{-1} * \\
&\quad *[F'(x)]^{-1}F(x) - x + [F'(x)]^{-1}F(x)\| \\
&= \|[I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1}F''(x)[F'(x)]^{-1}F(x)]^{-1}[F'(x)]^{-1}F(x) - \\
&\quad - [F'(x)]^{-1}F(x)\| \\
&= \|[I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1}F''(x)[F'(x)]^{-1}F(x)]^{-1}\left\{[F'(x)]^{-1}F(x) - \right. \\
&\quad \left. - [I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1}F''(x)[F'(x)]^{-1}F(x)][F'(x)]^{-1}F(x)\right\}\| \\
&\le \|[I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1}F''(x)[F'(x)]^{-1}F(x)]^{-1}\|\,\|[F'(x)]^{-1}F(x) - \\
&\quad - [F'(x)]^{-1}F(x) + \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1}F''(x)[[F'(x)]^{-1}F(x)]^{(2)}\| \\
&\le \|[I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1}F''(x)[F'(x)]^{-1}F(x)]^{-1}\|\,\tfrac{1}{2}\|[F'(x)]^{-1}\|\,K_2 * \\
&\quad *\|[F'(x)]^{-1}F(x)\|^2
\end{aligned}$$

$$\le \frac{1}{1-\frac{1}{2}\beta(x)K_2\gamma^*(x)}\,\frac{1}{2}\beta(x)K_2\gamma^{*2}(x)$$

Indem man x durch $x+\Delta x$ ersetzt und Satz II.4 beachtet, erhält man die Behauptung:

$$\|H(x+\Delta x) - N(x+\Delta x)\| \le \frac{\frac{1}{2}\beta(x+\Delta x)K_2\gamma^{*2}(x+\Delta x)}{1-\frac{1}{2}\beta(x+\Delta x)K_2\gamma^*(x+\Delta x)}$$

$$\beta(x+\Delta x) \le \frac{\beta(x)}{1-\beta(x)K_2\|\Delta x\|}$$

$$\gamma^*(x+\Delta x) \le \frac{\mathcal{S}(x) + \left(1+\frac{1}{2}\beta(x)K_2\|\Delta x\|\right)\|\Delta x\|}{1-\beta(x)K_2\|\Delta x\|}$$

■

Satz III.13: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \le \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \le \mathcal{S}_0$$

$$S_0 := \{x \in X : \|x - x_0\| \le 2\,\mathcal{S}_0\} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \leq K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \delta_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

Überdies gelte: (Hierdurch wird $\mu_0 \leq \frac{1}{2}$ weiter eingeschränkt!)
Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch

(3.128) μ_0 sowie $\nu_0 := 0$, $\varepsilon_0 := 0$, $\pi_0 := 1$ und

$$\varphi_n := \frac{\frac{1}{2} \dfrac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1-\nu_n)^3}}{1 - \frac{1}{2} \dfrac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1-\nu_n)^2}} + \frac{\nu_n}{1-\nu_n} \tag{3.129}$$

$$\psi_n := \frac{\frac{1}{2} \dfrac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1-\nu_n)^3}}{1 - \frac{1}{2} \dfrac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1-\nu_n)^2}} (1 + \tfrac{1}{2}\nu_n) + \tag{3.130}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\nu_n}{1-\nu_n}$$

$$\mu_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\mu_n^2}{(1-\mu_n)^2} \tag{3.131}$$

$$\nu_{n+1} := \frac{1}{1-\mu_n}(\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n) \tag{3.132}$$

$$\pi_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\mu_n}{1-\mu_n}\pi_n \tag{3.133}$$

$$\varepsilon_{n+1} := \varphi_n \pi_n + \psi_n \varepsilon_n \tag{3.134}$$

rekursiv definierten Zahlen μ_n, ν_n , ε_n , π_n , φ_n , ψ_n für $n \leq N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

$$\nu_n < 1 \quad \forall\ n \leq N \tag{3.135}$$

$$\frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1-\nu_n)^2} < 1 \quad \forall\ n \leq N \tag{3.136}$$

(3.137) $$\varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k \leq 2 \qquad \forall\ 1 \leq n \leq N$$

(3.138) $$\nu_{N+1} \leq \nu_N$$

(3.139) $$\varepsilon_{N+1} \leq \varepsilon_N$$

(3.140) $$\psi_N < 1$$

(3.141) $$\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \frac{\frac{1}{2}\mu_N}{1 - \frac{3}{2}\mu_N}\pi_N \leq 2$$

Dann gilt:

(3.142) Die durch $y_0 := x_0$ und

$$y_{n+1} := y_n - \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(y_n)\right]^{-1} F''(y_n)\left[F'(y_n)\right]^{-1} F(y_n)\right]^{-1} \cdot \left[F'(y_n)\right]^{-1} F(y_n)$$

rekursiv definierte Folge $\{y_n\}$ existiert, es gilt $y_n \in S_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x^*$.

(3.143) Es gilt $F(x^*) = \theta$.

(3.144) Die Gleichung $F(x) = \theta$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Zusätzlich zu den durch (3.128) - (3.134) definierten Folgen werden noch die durch

(3.145) β_0, ξ_0 sowie $\hat{\delta}_0 := 0$ und

(3.146) $$\beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1 - \mu_n}$$

(3.147) $$\xi_{n+1} := \tfrac{1}{2}\frac{\mu_n}{1 - \mu_n}\xi_n$$

(3.148) $$\hat{\delta}_{n+1} := \varphi_n \xi_n + \psi_n \hat{\delta}_n$$

rekursiv definierten Folgen $\{\beta_n\}, \{\xi_n\}, \{\hat{\delta}_n\}$ eingeführt.

Es wird zunächst gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (3.128) - (3.134) und (3.145) - (3.148) definierten Zahlen μ_n, ν_n, π_n, ε_n, φ_n, ψ_n, β_n, ξ_n, $\hat{\delta}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, sowie:

(3.149) $$\mu_n \geq 0 \quad ; \quad \mu_{n+1} \leq \mu_n \quad ; \quad \mu_n = \beta_n K_2 \xi_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(3.150) $$\nu_n \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \nu_{n+1} \leq \nu_n \quad \forall\ n \geq N$$

(3.151) $$\pi_n \geq 0 \quad ; \quad \pi_{n+1} \leq \tfrac{1}{2}\pi_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(3.152) $$\varepsilon_n \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(3.153) $$\beta_n \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(3.154) $$\xi_n \geq 0 \quad ; \quad \xi_{n+1} \leq \tfrac{1}{2}\xi_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(3.155) $$\hat{\delta}_n \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(3.156) $$\varphi_n \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(3.157) $$\psi_n \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(3.158) $$\frac{1}{2}\frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1 - \nu_n)^2} < 1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Denn: Da die Voraussetzungen des Satzes I.2 (über das Newton-Verfahren) erfüllt sind, erhält man aus Teil (A) des dortigen Beweises die Existenz von $\{\mu_n\}, \{\beta_n\}, \{\varsigma_n\}$ sowie die Aussagen (3.149), (3.153), (3.154). Aus (3.123) und (3.149) folgt (3.151). Die Aussagen (3.150), (3.152), (3.156), (3.157) und (3.158) erhält man aus (3.131), (3.132) sowie (3.135), (3.136), wenn man unter Beachtung von (3.138), (3.139) berücksichtigt, daß die durch (3.129) und (3.130) definierten Ausdrücke

$$\varphi_n := \varphi_n(\mu_n, \nu_n) \quad ; \quad \psi_n := \psi_n(\mu_n, \nu_n)$$

sowie $$\tfrac{1}{2}\,\frac{\mu_n + (1 + \tfrac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1-\nu_n)^2}$$

für $0 \le \nu_n < 1$ sowie $\mu_n \ge 0$ positiv oder Null sind und unter diesen Bedingungen in μ_n, ν_n monoton fallen, d.h.

Aus $\quad 0 \le \nu_n < 1 \quad , \quad 0 \le \nu_{n+1} < 1$

und $\quad \mu_n \ge 0 \quad , \quad \mu_{n+1} \ge 0 \quad , \quad \mu_{n+1} \le \mu_n \quad , \quad \nu_{n+1} \le \nu_n$

folgt $$\tfrac{1}{2}\,\frac{\mu_{n+1} + (1 + \tfrac{1}{2}\nu_{n+1})\nu_{n+1}}{(1-\nu_{n+1})^2} \le \tfrac{1}{2}\,\frac{\mu_n + (1 + \tfrac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1-\nu_n)^2}$$

sowie $\quad \varphi_{n+1} \le \varphi_n \quad ; \quad \psi_{n+1} \le \psi_n$

(3.155) ergibt sich dann unmittelbar aus (3.148).
Aus (3.149), (3.150) sowie (3.140) erhält man schließlich noch

(3.159) $\qquad \psi_n \le \psi_N < 1 \qquad \forall\ n \ge N$

(3.160) $\qquad \varphi_n \le \varphi_N \qquad \forall\ n \ge N$

Für den weiteren Beweis werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$H(x) := x - \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x)\right]^{-1}F''(x)\left[F'(x)\right]^{-1}F(x)\right]\left[F'(x)\right]^{-1}F(x)$$

$$N(x) := x - \left[F'(x)\right]^{-1}F(x)$$

$$\beta(x) := \left\|\left[F'(x)\right]^{-1}\right\|$$

$$\varsigma(x) := \left\|\left[F'(x)\right]^{-1}\right\|\,\|F(x)\|$$

Der Satz über das Newton-Verfahren (Satz I.2) liefert nun die Aussagen

(3.161) Die durch x_0 und $x_{n+1} := N(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $x_n \in S_0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Außerdem existiert ein $x^* \in S_0$ mit $x_n \to x^*$ und $F(x^*) = \theta$, wobei x^* die einzige Lösung der Gleichung $F(x) = \theta$ in S_0 ist.

Weiter entnimmt man Teil (B) des Beweises von Satz I.2 (über das Newton-Verfahren) die Abschätzungen:

(3.162)
$$\begin{cases} \beta(x_n) \le \beta_n & \forall\ n \in \mathbb{N} \\ \varsigma(x_n) \le \varsigma_n & \forall\ n \ge 1 \\ \beta_n K_2\, \varsigma_n = \mu_n & \forall\ n \in \mathbb{N} \\ \|x_{n+1} - x_n\| \le \varsigma_n & \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die durch das Halley-Verfahren erzeugte Iterationsfolge (deren Existenz noch gezeigt werden muß!) werde mit $\{y_n\}$ bezeichnet. D.h.

$$y_0 := x_0 \qquad \text{und} \qquad y_{n+1} := H(y_n)$$

Weiter sei

$$\Delta x_n := y_n - x_n \; ; \text{ d.h. } \Delta x_0 = \theta \text{ da } y_0 = x_0$$

Es wird nun gezeigt: Die Folge $\{y_n\}$ existiert und es gilt $y_n \in S_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierfür genügt es durch vollständige Induktion nach n zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$(\text{Ind } 1)_n$ $\quad \|\Delta x_n\| \le \hat{\delta}_n$

$(\text{Ind } 2)_n$ $\quad \hat{\delta}_n \le \varepsilon_n \, \delta_0 \quad ; \quad \delta_n \le \pi_n \, \delta_0$

$(\text{Ind } 3)_n$ $\quad y_n \in S_0$

$(\text{Ind } 4)_n$ $\quad \beta_n K_2 \, \hat{\delta}_n = \nu_n < 1$

$(\text{Ind } 5)_n$ $\quad [F'(y_n)]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$$\|[F'(y_n)]^{-1}\| \le \frac{\beta_n}{1 - \beta_n K_2 \hat{\delta}_n} = \frac{\beta_n}{1 - \nu_n}$$

$(\text{Ind } 6)_n$ $\quad [I - \frac{1}{2} [F'(y_n)]^{-1} F''(y_n) [F'(y_n)]^{-1} F(y_n)]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$$\|[I - \tfrac{1}{2} [F'(y_n)]^{-1} F''(y_n) [F'(y_n)]^{-1} F(y_n)]^{-1}\| \le$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \dfrac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2} \nu_n) \nu_n}{(1 - \nu_n)^2}}$$

wobei

$$\frac{1}{2} \frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2} \nu_n) \nu_n}{(1 - \nu_n)^2} < 1$$

Die Induktionsverankerung ergibt sich unmittelbar aus den Voraussetzungen und Definitionen, wenn man bei $(\text{Ind } 6)_0$ berücksichtigt:

$$\|\tfrac{1}{2} [F'(x_0)]^{-1} F''(x_0) [F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \le \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 \delta_0 = \tfrac{1}{2} \mu_0 < 1$$

Schluß von n auf n+1: Wegen $(\text{Ind } 3)_n$, $(\text{Ind } 5)_n$, $(\text{Ind } 6)_n$ existiert $y_{n+1} := H(y_n)$. Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_n$, $(\text{Ind } 4)_n$ sowie (3.162) und unter Heranziehung von Satz III.12, Satz II.4 erhält man:

$$\begin{aligned} \|\Delta x_{n+1}\| &= \|y_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &= \|H(y_n) - N(x_n)\| \\ &\le \|H(x_n + \Delta x_n) - N(x_n + \Delta x_n)\| + \|N(x_n + \Delta x_n) - N(x_n)\| \end{aligned}$$

$$\le \frac{\frac{1}{2} \dfrac{\beta(x_n) K_2 \delta(x_n) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|) \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|}{(1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|)}}{1 - \frac{1}{2} \dfrac{\beta(x_n) K_2 \delta(x_n) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|) \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|}{(1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|)}} *$$

$$\cdot \left\{ \mathcal{S}(x_n) + \left(1 + \tfrac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|\right) \| \Delta x_n \| \right\} +$$

$$+ \frac{\beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \| \left(\mathcal{S}(x_n) + \tfrac{1}{2} \| \Delta x_n \| \right)}{1 - \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|}$$

$$\leq \frac{\tfrac{1}{2} \dfrac{\mu_n + \left(1 + \tfrac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n}{(1-\nu_n)^3}}{1 - \tfrac{1}{2} \dfrac{\mu_n + \left(1 + \tfrac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n}{(1-\nu_n)^2}} \left\{ \mathcal{S}_n + \left(1 + \tfrac{1}{2}\nu_n\right) \hat{\delta}_n \right\} +$$

$$+ \frac{\nu_n \left(\mathcal{S}_n + \tfrac{1}{2} \hat{\delta}_n \right)}{1 - \nu_n}$$

$$= \hat{\delta}_{n+1} \qquad \text{wegen (3.129), (3.130) und (3.148)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 1)_{n+1}$. Aus $(\text{Ind } 2)_n$ folgt:

$$\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \mathcal{S}_n + \psi_n \hat{\delta}_n \leq \left(\varphi_n \pi_n + \psi_n \varepsilon_n \right) \mathcal{S}_0 = \varepsilon_{n+1} \mathcal{S}_0 \qquad \text{nach (3.134)}$$

$$\mathcal{S}_{n+1} = \tfrac{1}{2} \frac{\mu_n}{1 - \mu_n} \leq \tfrac{1}{2} \frac{\mu_n}{1 - \mu_n} \pi_n \mathcal{S}_0 = \pi_{n+1} \mathcal{S}_0 \qquad \text{nach (3.133)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 2)_{n+1}$. Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ und $(\text{Ind } 2)_{n+1}$ sowie (3.131), (3.149) und (3.162) erhält man:

$$\begin{aligned} \| y_{n+1} - x_0 \| &\leq \| y_{n+1} - x_{n+1} \| + \sum_{k=0}^{n} \| x_{k+1} - x_k \| \\ &\leq \hat{\delta}_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \mathcal{S}_k \\ &\leq \left(\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \pi_k \right) \mathcal{S}_0 \end{aligned}$$

Für $n+1 \leq N$ folgt hieraus nach (3.137):

$$\| y_{n+1} - x_0 \| \leq 2 \mathcal{S}_0 \qquad \Rightarrow \qquad y_{n+1} \in S_0$$

Ist $n+1 > N$, so hat man:

$$\begin{aligned} \| y_{n+1} - x_0 \| &\leq \left(\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \pi_k \right) \mathcal{S}_0 \\ &\leq \left(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \right) \mathcal{S}_0 \qquad \text{wegen (3.151), (3.152)} \\ &= \left(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \pi_k \right) \mathcal{S}_0 \\ &\leq \left(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \frac{\tfrac{1}{2}\mu_N}{1 - \mu_N} \pi_N \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tfrac{1}{2}\mu_N}{1 - \mu_N} \right)^k \right) \mathcal{S}_0 \end{aligned}$$

wegen (3.133), (3.149)

$$\leq \left(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \frac{\tfrac{1}{2}\mu_N}{1 - \tfrac{3}{2}\mu_N} \pi_N \right) \mathcal{S}_0$$

$$\leq 2\,\mathcal{S}_0 \qquad \text{wegen (3.141)}$$

Also gilt auch in diesem Falle $y_{n+1} \in S_0$. Daraus folgt $(\text{Ind } 3)_{n+1}$. Mit (3.146), (3.148) und $(\text{Ind } 4)_n$ folgt

$$\beta_{n+1} K_2 \hat{\delta}_{n+1} = \frac{\beta_n K_2}{1-\mu_n} (\varphi_n \mathcal{S}_n + \psi_n \hat{\delta}_n) = \frac{1}{1-\mu_n} (\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n) = \nu_{n+1}$$

nach (3.132). Hieraus folgt $(\text{Ind } 4)_{n+1}$. Unter Beachtung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$, $(\text{Ind } 4)_{n+1}$ und

$$[F'(y_{n+1})]^{-1} = [F'(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})]^{-1}$$

erhält man unter Heranziehung von Satz II.4 $(\text{Ind } 5)_{n+1}$. Ebenso erhält man wegen (3.158) und unter Beachtung des Banach-Lemmas (Satz I.1) $(\text{Ind } 6)_{n+1}$.
Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Nun ist für $n \geq N$ nach (3.159), (3.160):

$$\psi_n \leq \psi_N < 1 \quad \text{und} \quad \varphi_n \leq \varphi_N$$

d.h. $\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \mathcal{S}_n + \psi_n \hat{\delta}_n \leq \varphi_N \mathcal{S}_n + \psi_N \hat{\delta}_n$

Wegen $\psi_N < 1$ erhält man aus Satz II.5

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_n = 0$$

d.h. $\|y_n - x_n\| \to 0$, d.h. da $x_n \to x^*$ nach (3.161) gilt, gilt auch $y_n \to x^*$.
Zusammen mit (3.161) folgen hieraus die Behauptungen.
Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Der Beweis dieses Satzes gestattet unmittelbar die Konstruktion einer Fehlerschranke für das Halley-Verfahren.

Satz III.14: Es seien die Voraussetzungen von Satz III.13 erfüllt. Dann gilt

$$(3.163)\quad \|x^* - y_{n+1}\| \leq \frac{\tilde{\beta}_n K_2}{1 - \frac{1}{2}\tilde{\beta}_n K_2 \tilde{\mathcal{S}}_n} \left\{ 2 \frac{\tilde{\mathcal{S}}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\tilde{\beta}_n K_2 \tilde{\mathcal{S}}_n}} + \tilde{\mathcal{S}}_n \right\} \frac{\tilde{\mathcal{S}}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\tilde{\beta}_n K_2 \tilde{\mathcal{S}}_n}}$$

Dabei seien β_n, $\mathcal{S}_n$, ν_n, $\hat{\delta}_n$ wie in Satz III.13 angegeben definiert und

$$(3.164)\qquad \tilde{\beta}_n := \frac{\beta_n}{1-\nu_n}$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_n := \frac{\mathcal{S}_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\hat{\delta}_n}{1-\nu_n}$$

In dieser Form stellt (3.163) eine a-priori-Fehlerabschätzung dar. Setzt man hingegen

$$(3.165)\qquad \tilde{\beta}_n := \|[F'(y_n)]^{-1}\|$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_n := \|[F'(y_n)]^{-1} F(y_n)\|$$

so erhält man eine a-posteriori-Fehlerabschätzung.

Beweis: Es ist

$$F(y_n) + F'(y_n)\, c_n = 0$$

$$F(y_n) + F'(y_n)\, d_n + \tfrac{1}{2} F''(y_n)\, c_n\, d_n = 0$$

mit $c_n := -[F'(y_n)]^{-1} F(y_n)$

$d_n := y_{n+1} - y_n$

Also:

$$\begin{aligned}\|x^* - y_{n+1}\| &= \|x^* - y_n - d_n\| \\ &\le \|[I + \tfrac{1}{2}[F'(y_n)]^{-1} F''(y_n)\, c_n]^{-1}\| \, \|[F'(y_n)]^{-1}\| \cdot \\ &\quad \cdot \|F(y_n) + F'(y_n)\, d_n^* + \tfrac{1}{2} F''(y_n)\, c_n\, d_n^* - F(x^*)\| \\ &\quad \text{mit } d_n^* := x^* - y_n \\ &\le \frac{\|[F'(y_n)]^{-1}\|}{1 - \tfrac{1}{2}\|[F'(y_n)]^{-1}\| K_2 \|c_n\|} \left\{\|F(y_n) + F'(y_n)\, d_n^* - \right. \\ &\quad \left. - F(x^*)\| + \tfrac{1}{2} K_2 \|c_n\| \|d_n^*\|\right\} \\ &\le \frac{\|[F'(y_n)]^{-1}\|}{1 - \tfrac{1}{2}\|[F'(y_n)]^{-1}\| K_2 \|c_n\|} \left\{\tfrac{1}{2} K_2 \|d_n^*\|^2 + \tfrac{1}{2} K_2 \|c_n\| \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \|d_n^*\|\right\}\end{aligned}$$

Wählt man zunächst die Darstellung (3.165) für $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\varepsilon}_n$ so liefert die Bezeihung (1.12) von Satz I.4 (Fehlerschranke für das Newton-Verfahren):

$$\|x^* - y_n\| \le \frac{2\tilde{\varepsilon}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\tilde{\beta}_n K_2 \tilde{\varepsilon}_n}}$$

Hieraus folgt dann unmittelbar (3.163). Die Darstellung (3.164) ist nun aber eine Abschätzung für die $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\varepsilon}_n$ der Darstellung (3.165), die man sofort aus dem Beweis von Satz III.13 erhält. Damit ist (3.163) auch für die Darstellung (3.164) bewiesen. ∎

Die etwas unübersichtlichen Voraussetzungen von Satz III.13 sollen nun durch eine einfache Zahl ausgedrückt werden.

Satz III.15: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \le \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \le \varepsilon_0$$

$$S_0 := \{x \in X : \|x - x_0\| \le 2\varepsilon_0\} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \le K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \varepsilon_0 \le 0.3997$$

Dann gilt:

(3.166) Die durch x_0 und

$$x_{n+1} := x_n - \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_n)\right]^{-1} F''(x_n)\left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)\right]^{-1} \cdot$$
$$\cdot\left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)$$

rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

(3.167) Es gilt $F(x^*) = 0$.

(3.168) Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Für $\mu_0 = 0.3997$ beweist man die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz III.13 durch Ausrechnen. Kleinere Werte von μ_0 lassen sich durch geeignete Vergrößerung von K_2 stets auf 0.3997 vergrößern. ■

Die sehr schwachen Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes gestatten zwar nicht mehr den Beweis der kubischen Konvergenz des Halley-Verfahrens; sie sichern aber immer noch - wie der folgende Satz zeigt - die superquadratische Konvergenz dieses Verfahrens.

Satz III.16: Sei X ein Banach-Raum und $S \subset X$ offen und konvex. $F: S \to X$ sei auf S zweimal stetig Fréchet-differenzierbar mit $\sup_{x\in S} \|F''(x)\| \leq K_2$. Die durch $x_0 \in S$ und

$$x_{k+1} := x_k - \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F''(x_k)\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right]^{-1}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)$$

rekursiv definierte Folge $\{x_k\}$ existiere und es gelte $x_k \in S \ \forall k \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty} x_n = z \in S$ und $F(z) = 0$. Die Inversen

$$\left[F'(x_k)\right]^{-1} \quad \text{und} \quad \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F''(x_k)\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right]^{-1}$$

seien für alle x_k, $k \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|x_k - z\|^2} \Big\| x_k - z - \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F''(x_k)\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right]^{-1} \cdot$$
$$\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k) \Big\| = 0$$

Beweis: Wie in dem analogen Satz über das Tschebyscheff-Verfahren (Satz II.11) hat man

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_k - z - \left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\|}{\|x_k - z\|} = 0$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
&\|x_k - z - \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F''(x_k)\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right]^{-1}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\| = \\
&= \Big\|\left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F''(x_k)\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right]^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot\Big\{ - \left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k) + \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F''(x_k)\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right] \cdot \\
&\quad \cdot (x_k - z)\Big\}\Big\| \\
&= \Big\|\left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F''(x_k)\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right]^{-1}\Big\{(x_k - z) - \\
&\quad - \left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k) - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F''(x_k)(x_k - z)^{(2)} + \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} \cdot \\
&\quad F''(x_k)\left[x_k - z - \left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right](x_k - z)\Big\| \\
&\leq \Big\|\left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_k)\right]^{-1} F''(x_k)\left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right]^{-1}\Big\| \Big\|\left[F'(x_k)\right]^{-1}\Big\| \\
&\quad \Big\| F(z) - F(x_k) + F'(x_k)(x_k - z) - \tfrac{1}{2} F''(x_k)(x_k - z)^{(2)} + \\
&\quad + \tfrac{1}{2} F''(x_k)\left[x_k - z - \left[F'(x_k)\right]^{-1} F(x_k)\right](x_k - z)\Big\|
\end{aligned}$$

$$\leq \left\| \left[I - \tfrac{1}{2} \left[F'(x_k) \right]^{-1} F''(x_k) \left[F'(x_k) \right]^{-1} F(x_k) \right]^{-1} \right\| \left\| \left[F'(x_k) \right]^{-1} \right\| \cdot$$
$$\cdot \Big\{ \left\| F(z) + F'(z)(x_k - z) + \tfrac{1}{2} F''(z)(x_k - z)^{(2)} - F(x_k) + \right.$$
$$+ \left[F'(x_k) - F'(z) \right](x_k - z) - \tfrac{1}{2} \left[F''(z) + F''(x_k) \right](x_k - z)^{(2)} +$$
$$\left. + \tfrac{1}{2} F''(x_k) \left[x_k - z - \left[F'(x_k) \right]^{-1} F(x_k) \right](x_k - z) \right\| \Big\}$$
$$\leq \left\| \left[I - \tfrac{1}{2} \left[F'(x_k) \right]^{-1} F''(x_k) \left[F'(x_k) \right]^{-1} F(x_k) \right]^{-1} \right\| \left\| \left[F'(x_k) \right]^{-1} \right\| \cdot$$
$$\Big\{ \left\| F(z) + F'(z)(x_k - z) + \tfrac{1}{2} F''(z)(x_k - z)^{(2)} - F(x_k) \right\| + \left\| \left[F'(x_k) - \right. \right.$$
$$\left. - F'(z) - F''(z)(x_k - z) \right](x_k - z) + \tfrac{1}{2} \left[F''(z) - F''(x_k) \right](x_k - z)^{(2)} +$$
$$\left. + \tfrac{1}{2} F''(x_k) \left[x_k - z - \left[F'(x_k) \right]^{-1} F(x_k) \right](x_k - z) \right\| \Big\}$$
$$\leq \left\| \left[I - \tfrac{1}{2} \left[F'(x_k) \right]^{-1} F''(x_k) \left[F'(x_k) \right]^{-1} F(x_k) \right]^{-1} \right\| \left\| \left[F'(x_k) \right]^{-1} \right\| \cdot$$
$$\Big\{ \left\| F(z) + F'(z)(x_k - z) + \tfrac{1}{2} F''(z)(x_k - z)^{(2)} - F(x_k) \right\| + \left\| F'(x_k) - \right.$$
$$\left. - F'(z) - F''(z)(x_k - z) \right\| \left\| x_k - z \right\| + \tfrac{1}{2} \left\| F''(z) - F''(x_k) \right\| \left\| x_k - z \right\|^2 +$$
$$\left. + \tfrac{1}{2} \left\| F''(x_k) \right\| \left\| x_k - z - \left[F'(x_k) \right]^{-1} F(x_k) \right\| \left\| x_k - z \right\| \right\}$$

Nun ist

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\left\| F(z) + F'(z)(x_k - z) + \tfrac{1}{2} F''(z)(x_k - z)^{(2)} - F(x_k) \right\|}{\left\| x_k - z \right\|^2} = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\left\| F'(z) + F''(z)(x_k - z) - F'(x_k) \right\|}{\left\| x_k - z \right\|} = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\left\| x_k - z - \left[F'(x_k) \right]^{-1} F(x_k) \right\|}{\left\| x_k - z \right\|} = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} \left\| F''(z) - F''(x_k) \right\| = 0$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Die folgenden Sätze verwenden im Beweis das gemischte Newton-Verfahren. Sie enthalten demgemäß in den Voraussetzungen auch die dritte Ableitung des betrachteten Operators.

Satz III.17: Sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen und $S \subset M$ konvex. Sei $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist mit

$$\sup_{x \in S} \left\| F''(x) \right\| \leq K_2 \quad \text{und} \quad \sup_{x \in S} \left\| F'''(x) \right\| \leq K_3$$

Weiterhin seien:

$$H(x) := x - \left[I - \tfrac{1}{2} \left[F'(x) \right]^{-1} F''(x) \left[F'(x) \right]^{-1} F(x) \right]^{-1} \left[F'(x) \right]^{-1} F(x)$$
$$c(x) := - \left[F'(x) \right]^{-1} F(x)$$
$$\gamma(x) := \left\| \left[F'(x) \right]^{-1} F(x) \right\|$$
$$\beta(x) := \left\| \left[F'(x) \right]^{-1} \right\|$$
$$\delta(x) := \left\| \left[F'(x) \right]^{-1} \right\| \left\| F(x) \right\|$$
$$G(x) := x - \left[F'(x) \right]^{-1} F(x) - \left[F'(x) \right]^{-1} F(x + c(x))$$

Es seien nun x, $x + \Delta x$, $x + c(x)$, $x + \Delta x + c(x + \Delta x) \in S$ und $[F'(x)]^{-1}$ sowie $[I - \frac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x) [F'(x)]^{-1} F(x)]^{-1}$ existieren und sind beschränkt. Weiter gelte

$$\beta(x)\ K_2 \|\Delta x\| < 1 \quad ; \quad \beta(x)\ K_2\ \mathcal{S}(x) < 1$$

und

$$\frac{1}{2} \frac{\beta(x)\ K_2\ \mathcal{S}(x) + (1 + \frac{1}{2}\beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|)\beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|}{(1 - \beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|)^2} < 1$$

Dann gilt:

$$\|H(x + \Delta x) - G(x + \Delta x)\| \leq$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{\beta(x)\ K_2\ \mathcal{S}(x) + (1 + \frac{1}{2}\beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|)\beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|}{(1 - \beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|)^2}} *$$

$$* \frac{1}{6} \left\{ \frac{\beta(x)\ K_3\ \mathcal{S}^2(x) + 2(1 + \frac{1}{2}\beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|)\beta(x)\ K_3 \|\Delta x\|\ \mathcal{S}(x)}{(1 - \beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1 + \frac{1}{2}\beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|)\ \beta(x)\ K_3 \|\Delta x\|^2}{(1 - \beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|)^3} \right\} *$$

$$* \left\{ \mathcal{S}(x) + (1 + \frac{1}{2}\beta(x)\ K_2 \|\Delta x\|) \|\Delta x\| \right\}$$

Beweis: Es gilt

$$\|H(x) - G(x)\| =$$

$$= \| x - [I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)[F'(x)]^{-1} F(x)]^{-1}[F'(x)]^{-1} F(x) - x +$$
$$+ [F'(x)]^{-1} F(x) + [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) \|$$

$$= \| [I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)[F'(x)]^{-1} F(x)]^{-1} \{ [F'(x)]^{-1} F(x) -$$
$$- [I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)[F'(x)]^{-1} F(x)][F'(x)]^{-1} F(x) \} - [F'(x)]^{-1} *$$
$$* F(x + c(x)) \|$$

$$\leq \| [I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)[F'(x)]^{-1} F(x)]^{-1} \| \| \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x) *$$
$$[[F'(x)]^{-1} F(x)]^{(2)} - [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) \|$$

$$= \| [I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)[F'(x)]^{-1} F(x)]^{-1} \| \| \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)\ c(x)^{(2)} -$$
$$- [F'(x)]^{-1} F(x + c(x)) - [F'(x)]^{-1} F'(x)\ c(x) - [F'(x)]^{-1} F(x) +$$
$$+ [F'(x)]^{-1} F'(x)\ c(x) + [F'(x)]^{-1} F(x) \|$$

$$= \| [I - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)[F'(x)]^{-1} F(x)]^{-1} \| \| [F'(x)]^{-1} (F(x) +$$
$$+ F'(x)\ c(x) + \tfrac{1}{2} F''(x)\ c(x)^{(2)} - F(x + c(x))) \|$$

$$\leq \frac{\| [F'(x)]^{-1} \|\ \frac{1}{6}\ K_3\ \|c(x)\|^3}{1 - \frac{1}{2}\| [F'(x)]^{-1} \|\ K_2\ \| [F'(x)]^{-1} F(x) \|}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{6}\beta(x)\ K_3\ \gamma^3(x)}{1 - \frac{1}{2}\beta(x)\ K_2\ \gamma^2(x)}$$

Indem man x durch $x + \Delta x$ ersetzt und Satz II.4 beachtet, erhält man so die Behauptung:

$$\| H(x+\Delta x) - G(x+\Delta x)\| \leq \frac{\frac{1}{6}\beta(x+\Delta x)\ K_3\ \gamma^3(x+\Delta x)}{1 - \frac{1}{2}\beta(x+\Delta x)\ K_2\ \gamma^2(x+\Delta x)}$$

$$\beta(x+\Delta x) \leq \frac{\beta(x)}{1 - \beta(x)\ K_2\ \|\Delta x\|}$$

$$\gamma^2(x+\Delta x) \leq \frac{\mathcal{S}(x) + (1 + \frac{1}{2}\beta(x)\ K_2\ \|\Delta x\|)\ \|\Delta x\|}{1 - \beta(x)\ K_2\ \|\Delta x\|}$$

■

Satz III.18: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzeirbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq \beta_0 \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \leq \mathcal{S}_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \|x - x_0\| \leq 2\mathcal{S}_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq K_2$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F'''(x) \| \leq K_3$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \mathcal{S}_0 \leq \frac{1}{2}$$

$$\chi_0 := \beta_0 K_3 \mathcal{S}_0^2$$

Überdies gelte:
Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch

(3.169) μ_0, χ_0 sowie $\nu_0 := 0$, $\lambda_0 := 0$, $\xi_0 := 0$, $\varepsilon_0 := 0$, $\pi_0 := 1$
und

(3.170)
$$\mathcal{P}_n := \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\dfrac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\,\nu_n}{(1-\nu_n)^2}} * \frac{\frac{1}{6}\left\{\chi_n + 2(1 + \frac{1}{2}\nu_n)\,\xi_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)^2 \lambda_n\right\}}{(1-\nu_n)^3} +$$

$$+ \frac{\nu_n}{1 - \nu_n}\left\{2 + \mu_n + \frac{\nu_n(\frac{1}{2}\mu_n + \frac{1}{4}\nu_n)}{1 - \nu_n}\right\} +$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\nu_n\left(\mu_n+\left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n\right)}{\left(1-\nu_n\right)^3}$$

$$(3.171)\qquad \psi_n := \frac{1}{1-\frac{1}{2}\dfrac{\mu_n+\left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n}{\left(1-\nu_n\right)^2}} \cdot$$

$$\cdot\frac{\frac{1}{6}\left\{\chi_n+2\left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right)\xi_n+\left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right)^2\lambda_n\right\}\left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right)}{\left(1-\nu_n\right)^3}+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\nu_n}{1-\nu_n}\left\{2+\mu_n+\frac{\nu_n\left(\frac{1}{2}\mu_n+\frac{1}{4}\nu_n\right)}{\left(1-\nu_n\right)}\right\}+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\nu_n\left(\mu_n+\left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n\right)\left(1+\frac{1}{2}\nu_n\right)}{\left(1-\nu_n\right)^3}$$

$$(3.172)\qquad \mu_{n+1} := \frac{\frac{1}{8}\mu_n^4+\frac{1}{2}\mu_n^3}{\left(1-\mu_n-\frac{1}{2}\mu_n^2\right)^2}$$

$$(3.173)\qquad \nu_{n+1} := \frac{\varphi_n\mu_n+\psi_n\nu_n}{1-\mu_n-\frac{1}{2}\mu_n^2}$$

$$(3.174)\qquad \pi_{n+1} := \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3+\frac{1}{2}\mu_n^2}{1-\mu_n-\frac{1}{2}\mu_n^2}\,\pi_n$$

$$(3.175)\qquad \varepsilon_{n+1} := \varphi_n\pi_n+\psi_n\varepsilon_n$$

$$(3.176)\qquad \chi_{n+1} := \frac{\left(\frac{1}{8}\mu_n^3+\frac{1}{2}\mu_n^2\right)^2}{\left(1-\mu_n-\frac{1}{2}\mu_n^2\right)^3}\,\chi_n$$

$$(3.177)\qquad \xi_{n+1} := \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3+\frac{1}{2}\mu_n^2}{\left(1-\mu_n-\frac{1}{2}\mu_n^2\right)^2}\left(\varphi_n\chi_n+\psi_n\xi_n\right)$$

$$(3.178)\qquad \lambda_{n+1} := \frac{1}{\left(1-\mu_n-\frac{1}{2}\mu_n^2\right)^2}\left(\varphi_n^2\chi_n+2\varphi_n\psi_n\xi_n+\psi_n^2\lambda_n\right)$$

rekursiv definierten Zahlen μ_n, χ_n, ν_n, λ_n, ξ_n, ε_n, π_n, φ_n, ψ_n für $n \leq N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

(3.179) $\nu_n < 1 \quad \forall \; n \leq N$

(3.180) $\frac{1}{2} \dfrac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1 - \nu_n)^2} < 1 \qquad \forall \; n \leq N$

(3.181) $\varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \frac{1}{2}\mu_k)\pi_k \leq 2 \qquad \forall \; 1 \leq n \leq N$

(3.182) $\nu_{N+1} \leq \nu_N$

(3.183) $\varepsilon_{N+1} \leq \varepsilon_N$

(3.184) $\varepsilon_{N+1} = \varepsilon_N$

(3.185) $\lambda_{N+1} \leq \lambda_N$

(3.186) $\psi_N < 1$

(3.187) $\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} (1 + \frac{1}{2}\mu_k)\pi_k + \left\{ 1 + \frac{1}{2} \dfrac{\frac{1}{8}\mu_N^4 + \frac{1}{2}\mu_N^3}{(1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2)^2} \right\} \cdot$

$$\cdot \pi_N \frac{\frac{1}{8}\mu_N^3 + \frac{1}{2}\mu_N^2}{1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2} \leq 2$$

Dann gilt:

(3.188) Die durch $y_0 := x_0$ und

$$y_{n+1} := y_n - \left[I - \tfrac{1}{2} \left[F'(y_n) \right]^{-1} F''(y_n) \left[F'(y_n) \right]^{-1} F(y_n) \right]^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left[F'(y_n) \right]^{-1} F(y_n)$$

rekursiv definierte Folge $\{y_n\}$ existiert, es gilt $y_n \in S_0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n \to \infty} y_n = x^*$.

(3.189) Es gilt $F(x^*) = 0$.

(3.190) Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Zusätzlich zu den durch (3.169) - (3.178) definierten Folgen werden noch die durch

(3.191) β_0, ε_0 sowie $\hat{\delta}_0 := 0$ und

(3.192) $\beta_{n+1} := \dfrac{\beta_n}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}$

(3.193) $\varepsilon_{n+1} := \dfrac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \varepsilon_n$

(3.194) $\hat{\delta}_{n+1} := \varphi_n \varepsilon_n + \psi_n \hat{\delta}_n$

rekursiv definierten Folgen $\{\beta_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$, $\{\hat{\delta}_n\}$ eingeführt.

Es wird nun zunächst gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (3.169) - (3.178) und (3.191) - (3.194) definierten Zahlen

φ_n , ψ_n , μ_n , ν_n , π_n , ε_n , χ_n , ξ_n , λ_n , β_n , σ_n , $\hat{\delta}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren sowie

(3.195) $\mu_n \geq 0$, $\mu_{n+1} \leq \mu_n$, $\mu_n = \beta_n K_2 \sigma_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(3.196) $\nu_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\nu_{n+1} \leq \nu_n$ $\forall\, n \geq N$

(3.197) $\pi_n \geq 0$, $\pi_{n+1} \leq \frac{3}{8}\, \pi_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(3.198) $\varepsilon_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$ $\forall\, n \geq N$

(3.199) $\chi_n \geq 0$, $\chi_{n+1} \leq \frac{3}{8}\, \chi_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(3.200) $\xi_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\xi_{n+1} \leq \xi_n$ $\forall\, n \geq N$

(3.201) $\lambda_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$ $\forall\, n \geq N$

(3.202) $\beta_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(3.203) $\sigma_n \geq 0$, $\sigma_{n+1} \leq \frac{3}{8}\, \sigma_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(3.204) $\hat{\delta}_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(3.205) $\varphi_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(3.206) $\psi_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(3.207) $$\frac{1}{2}\, \frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\, \nu_n)\, \nu_n}{(1 - \nu_n)^2} < 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Denn: Da die Voraussetzungen des Satzes über das gemischte Newton-Verfahren (Satz I.7) erfüllt sind, erhält man aus Teil (A) des dortigen Beweises die Existenz von $\{\mu_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\sigma_n\}$ sowie die Aussagen (3.195), (3.202), (3.203). Aus (3.174) und (3.195) folgt (3.197). Aus (3.176) und (3.195) folgt (3.199). Die Aussagen (3.196), (3.198), (3.200), (3.201), (3.205), (3.206) und (3.207) erhält man aus (3.172), (3.173), (3.177), (3.178) sowie (3.179), (3.180), wenn man unter Beachtung von (3.182), (3.183), (3.184) und (3.185) sowie (3.199) berücksichtigt, daß die durch (3.170) und (3.171) definierten Ausdrücke

$$\varphi_n := \varphi_n(\mu_n, \nu_n, \chi_n, \xi_n, \lambda_n)$$
$$\psi_n := \psi_n(\mu_n, \nu_n, \chi_n, \xi_n, \lambda_n)$$

sowie

$$\frac{1}{2}\, \frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\, \nu_n)\, \nu_n}{(1 - \nu_n)^2}$$

für $0 \leq \nu_n < 1$ sowie $\frac{1}{2}\, \frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\, \nu_n)\, \nu_n}{(1 - \nu_n)^2} < 1$ und $\mu_n, \chi_n, \xi_n, \lambda_n \geq 0$ positiv oder Null sind und unter diesen Bedingungen in μ_n, ν_n, χ_n, ξ_n, λ_n monoton fallen, d.h.:

Aus $0 \leq \nu_n < 1$; $0 \leq \nu_{n+1} < 1$

$\mu_n, \chi_n, \xi_n, \lambda_n \geq 0$; $\mu_{n+1}, \chi_{n+1}, \xi_{n+1}, \lambda_{n+1} \geq 0$

$$\frac{1}{2}\, \frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\, \nu_n)\, \nu_n}{(1 - \nu_n)^2} < 1 \quad ; \quad \frac{1}{2}\, \frac{\mu_{n+1} + (1 + \frac{1}{2}\, \nu_{n+1})\, \nu_{n+1}}{(1 - \nu_{n+1})^2} < 1$$

und $\mu_{n+1} \leq \mu_n$; $\chi_{n+1} \leq \chi_n$; $\xi_{n+1} \leq \xi_n$; $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$; $\nu_{n+1} \leq \nu_n$

folgt $\vartheta_{n+1} \leq \vartheta_n$; $\psi_{n+1} \leq \psi_n$

(3.204) ergibt sich dann aber unmittelbar aus (3.194). Aus (3.195), (3.196), (3.199), (3.200), (3.201) sowie (3.186) erhält man schließlich noch

(3.208) $\psi_n \leq \psi_N < 1$ für $n \geq N$

(3.209) $\vartheta_n \leq \vartheta_N$ für $n \geq N$

Für den weiteren Beweis werden nun folgende Bezeichnungen verwendet:

$H(x) := x - [I - \frac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x) [F'(x)]^{-1} F(x)]^{-1} [F'(x)]^{-1} F(x)$

$c(x) := - [F'(x)]^{-1} F(x)$

$G(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x) - [F'(x)]^{-1} F(x + c(x))$

$\beta(x) := \| [F'(x)]^{-1} \|$

$\zeta(x) := \| [F'(x)]^{-1} \| \, \| F(x) \|$

Der Satz über das gemischte Newton-Verfahren (Satz I.7) liefert nun die Aussagen:

(3.210) Die durch x_0 und $x_{n+1} := G(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $x_n \in S_0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$. Außerdem existiert ein $x^* \in S_0$ mit $x_n \to x^*$ und $F(x^*) = \theta$, wobei x^* die einzige Lösung der Gleichung $F(x) = \theta$ in S_0 ist.

Weiter entnimmt man dem Teil (B) des Beweises von Satz I.7 (über das gemischte Newton-Verfahren):

(3.211)
$$\begin{cases} \beta(x_n) \leq \beta_n & \forall \, n \in \mathbb{N} \\ \zeta(x_n) \leq \zeta_n & \forall \, n \geq 1 \\ \beta_n K_2 \zeta_n = \mu_n & \forall \, n \in \mathbb{N} \\ \| x_{n+1} - x_n \| \leq (1 + \frac{1}{2}\mu_n) \zeta_n & \forall \, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die durch das Halley-Verfahren erzeugte Iterationsfolge (deren Existenz noch gezeigt werden muß!) werde mit $\{y_n\}$ bezeichnet.

D.h. $y_0 := x_0$ und $y_{n+1} := H(y_n)$

Weiter sei $\Delta x_n := y_n - x_n$; d.h. $\Delta x_0 = \theta$, da $y_0 = x_0$

Es wird nun gezeigt: Die Folge $\{y_n\}$ existiert und es gilt $y_n \in S_0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$. Hierfür genügt es durch vollständige Induktion nach n zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(Ind 1)$_n$ $\| \Delta x_n \| \leq \hat{\delta}_n$

(Ind 2)$_n$ $\hat{\delta}_n \leq \varepsilon_n \zeta_0$; $\zeta_n \leq \pi_n \zeta_0$

(Ind 3)$_n$ $y_n \in S_0$

(Ind 4)$_n$ $\beta_n K_2 \hat{\delta}_n = \nu_n < 1$

$\beta_n K_3 \zeta_n^2 = \chi_n$

$\beta_n K_3 \zeta_n \hat{\delta}_n = \xi_n$

$\beta_n K_3 \hat{\delta}_n^2 = \alpha_n$

(Ind 5)$_n$ $[F'(y_n)]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$$\| [F'(y_n)]^{-1} \| \leq \frac{\beta_n}{1 - \beta_n K_2 \bar{\delta}_n} = \frac{\beta}{1 - \nu_n}$$

$(\text{Ind } 6)_n$ $\left[I - \frac{1}{2} [F'(y_n)]^{-1} F''(y_n) [F'(y_n)]^{-1} F(y_n)\right]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$$\left\| \left[I - \frac{1}{2} [F'(y_n)]^{-1} F''(y_n) [F'(y_n)]^{-1} F(y_n)\right]^{-1} \right\| \leq$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \dfrac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2} \nu_n) \nu_n}{(1 - \nu_n)^2}}$$

Die Induktionsverankerung ergibt sich unmittelbar aus den Voraussetzungen und Definitionen, wenn man bei $(\text{Ind } 6)_0$ berücksichtigt:

$$\frac{1}{2} \| [F'(x_0)]^{-1} F''(x_0) [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \leq \frac{1}{2} \beta_0 K_2 \delta_0 = \frac{1}{2} \mu_0 < 1$$

Schluß von n auf n+1: Wegen $(\text{Ind } 3)_n$, $(\text{Ind } 5)_n$ und $(\text{Ind } 6)_n$ existiert $y_{n+1} := H(y_n)$. Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_n$, $(\text{Ind } 4)_n$ sowie (3.211), unter Berücksichtigung von (3.207) und unter Heranziehung von Satz III.17 erhält man:

$$\begin{aligned}
\| \Delta x_{n+1} \| &= \| y_{n+1} - x_{n+1} \| \\
&= \| H(y_n) - G(x_n) \| \\
&\leq \| H(x_n + \Delta x_n) - G(x_n + \Delta x_n) \| + \| G(x_n + \Delta x_n) - G(x_n) \|
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \dfrac{\beta(x_n) K_2 \delta(x_n) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|) \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|}{(1 - \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|)^2}} *$$

$$* \frac{1}{6} \left\{ \frac{\beta(x_n) K_3 \delta^2(x_n) + 2(1 + \frac{1}{2} \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|) \beta(x_n) K_3 \| \Delta x_n \| \delta(x_n)}{(1 - \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1 + \frac{1}{2} \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|)^2 \beta(x_n) K_3 \| \Delta x_n \|^2}{(1 - \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|)^3} \right\} *$$

$$* \left\{ \delta(x_n) + (1 + \frac{1}{2} \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|) \| \Delta x_n \| \right\} +$$

$$+ \frac{\beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \| (\delta(x_n) + \frac{1}{2} \| \Delta x_n \|)}{1 - \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|} *$$

$$* \left\{ 2 + \beta(x_n) K_2 \delta(x_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \| (\frac{1}{2} \beta(x_n) K_2 \delta(x_n) + \frac{1}{4} \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|)}{1 - \beta(x_n) K_2 \| \Delta x_n \|} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\| *$$

$$\frac{\beta(x_n) K_2 \varsigma(x_n) + \left(1 + \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|}{\left(1 - \beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)^3} *$$

$$* \left\{\varsigma(x_n) + \left(1 + \frac{1}{2}\beta(x_n) K_2 \|\Delta x_n\|\right)\|\Delta x_n\|\right\}$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\dfrac{\mu_n + \left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n}{\left(1 - \nu_n\right)^2}} *$$

$$* \frac{1}{6}\left\{\frac{\chi_n + 2\left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)\varepsilon_n + \left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)^2 \lambda_n}{\left(1 - \nu_n\right)^2}\right\} *$$

$$* \frac{\varsigma_n + \left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)\hat{\delta}_n}{1 - \nu_n} + \frac{\nu_n\left(\varsigma_n + \frac{1}{2}\hat{\delta}_n\right)}{1 - \nu_n} * \left\{2 + \mu_n + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu_n\left(\frac{1}{2}\mu_n + \frac{1}{4}\nu_n\right)}{1 - \nu_n}\right\} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\nu_n\left\{\mu_n + \left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)\nu_n\right\}\left\{\varsigma_n + \left(1 + \frac{1}{2}\nu_n\right)\hat{\delta}_n\right\}}{\left(1 - \nu_n\right)^3}$$

$$= \hat{\delta}_{n+1} \qquad \text{wegen (3.170), (3.171) und (3.194)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 1)_{n+1}$. Aus $(\text{Ind } 2)_n$ folgt

$$\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \varsigma_n + \psi_n \hat{\delta}_n \leq \left(\varphi_n \pi_n + \psi_n \varepsilon_n\right)\varsigma_0 = \varepsilon_{n+1}\varsigma_0 \qquad \text{wegen (3.175)}$$

$$\varsigma_{n+1} = \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}\varsigma_n = \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2}\pi_n\varsigma_0 = \pi_{n+1}\varsigma_0$$

wegen (3.174). Hieraus folgt $(\text{Ind } 2)_{n+1}$. Mit Verwendung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ und $(\text{Ind } 2)_{n+1}$ sowie unter Berücksichtigung von (3.172), (3.195) und (3.211) erhält man:

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - x_0\| &\leq \|y_{n+1} - x_{n+1}\| + \sum_{k=0}^{n}\|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq \hat{\delta}_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2}\mu_k\right)\varsigma_k \\ &\leq \left(\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2}\mu_k\right)\pi_k\right)\varsigma_0\end{aligned}$$

Für $n+1 \leq N$ folgt hieraus nach (3.181):

$$\| y_{n+1} - x_0 \| \le 2\,\varepsilon_0 \qquad \Rightarrow \qquad y_{n+1} \in S_0$$

Ist n+1 > N, so hat man:

$$\| y_{n+1} - x_0 \| \le \Big(\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k \Big)\varepsilon_0$$

$$\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k \Big)\varepsilon_0$$

$$\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k + \Big(1 + \frac{\frac{1}{8}\mu_N^4 + \frac{1}{2}\mu_N^3}{\big(1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2\big)^2}\Big) \sum_{k=N+1}^{\infty} \pi_k \Big)\varepsilon_0$$

$$\le \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k + \Big(1 + \frac{\frac{1}{8}\mu_N^4 + \frac{1}{2}\mu_N^3}{\big(1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2\big)^2}\Big) \cdot$$

$$\cdot \frac{\frac{1}{8}\mu_N^3 + \frac{1}{2}\mu_N^2}{1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2}\,\pi_N \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{8}\mu_N^3 + \frac{1}{2}\mu_N^2}{1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2} \right)^k \Big)\varepsilon_0$$

$$= \Big(\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \big(1 + \tfrac{1}{2}\mu_k\big)\pi_k + \Big(1 + \frac{\frac{1}{8}\mu_N^4 + \frac{1}{2}\mu_N^3}{\big(1 - \mu_N - \frac{1}{2}\mu_N^2\big)^2}\Big) \cdot$$

$$\cdot \frac{\frac{1}{8}\mu_N^3 + \frac{1}{2}\mu_N^2}{1 - \mu_N - \mu_N^2 - \frac{1}{8}\mu_N^3}\,\pi_N \Big)\varepsilon_0$$

$$\le 2\,\varepsilon_0 \qquad \text{nach (3.187)}$$

Also gilt auch in diesem Falle $y_{n+1} \in S_0$. Hieraus folgt $(\text{Ind } 3)_{n+1}$. Mit (3.173), (3.176), (3,177), (3.178) sowie (3.192), (3.193), (3.194) und $(\text{Ind } 4)_n$ erhält man:

$$\beta_{n+1} K_2 \hat{\delta}_{n+1} = \frac{\beta_n K_2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \big(\varphi_n \varepsilon_n + \psi_n \hat{\delta}_n \big)$$

$$= \frac{1}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \big(\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n \big)$$

$$= \nu_{n+1}$$

$$\beta_{n+1} K_3 \varepsilon_{n+1}^2 = \frac{\beta_n K_3}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \left\{ \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \right\}^2 \varepsilon_n^2$$

$$= \frac{\big(\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2\big)^2}{\big(1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2\big)^3}\,\chi_n$$

$$= \chi_{n+1}$$

$$\beta_{n+1} K_3 \varepsilon_{n+1} \hat{\delta}_{n+1} = \frac{\beta_n K_3}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} + \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} \big(\varphi_n \varepsilon_n + \psi_n \hat{\delta}_n \big) \varepsilon_n$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\mu_n^3 + \frac{1}{2}\mu_n^2}{(1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2)^2} (\varphi_n \chi_n + \psi_n \xi_n)$$

$$= \xi_{n+1}$$

$$\beta_{n+1} K_3 \hat{\delta}_{n+1}^2 = \frac{\beta_n K_3}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} (\varphi_n \xi_n + \psi_n \hat{\delta}_n)^2$$

$$= \frac{\beta_n K_3}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} (\varphi_n^2 \xi_n^2 + 2 \varphi_n \psi_n \xi_n \hat{\delta}_n + \psi_n^2 \hat{\delta}_n^2)$$

$$= \frac{1}{1 - \mu_n - \frac{1}{2}\mu_n^2} (\varphi_n^2 \chi_n + 2 \varphi_n \psi_n \xi_n + \psi_n^2 \lambda_n)$$

=

Hieraus folgt mit (3.179) und (3.196) $(\text{Ind } 4)_{n+1}$. Unter Beachtung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$, $(\text{Ind } 4)_{n+1}$ und

$$[F'(y_{n+1})]^{-1} = [F'(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})]^{-1}$$

erhält man unter Heranziehung von Satz II.4 $(\text{Ind } 5)_{n+1}$. Ebenso erhält man wegen (3.207) unter Beachtung von Satz II.4 und des Banach-Lemmas (Satz I.1) $(\text{Ind } 6)_{n+1}$. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Nun ist für $n \geq N$ nach (3.208), (3.209):

$$\psi_n \leq \psi_N < 1 \quad \text{und} \quad \varphi_n \leq \varphi_N$$

d.h.

$$\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \xi_n + \psi_n \hat{\delta}_n \leq \varphi_N \xi_n + \psi_N \hat{\delta}_n$$

Wegen $\psi_N < 1$ erhält man aus Satz II.5

$$\lim_{n \to \infty} \hat{\delta}_n = 0$$

d.h. $\| y_n - x_n \| \to 0$, d.h. da $x_n \to x^*$ nach (3.210) gilt, gilt auch $y_n \to x^*$. Zusammen mit (3.208) folgen hieraus die Behauptungen.
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bevor die Voraussetzungen von Satz III.18 in Form einfacher Zahlenkombinationen ausgedrückt werden, soll noch eine Fehlerschranke zum Halley-Verfahren angegeben werden, die sich unmittelbar aus dem Beweis von Satz III.18 ergibt.

Satz III.19: Es seien die Voraussetzungen von Satz III.18 erfüllt. Dann gilt:

$$(3.212) \quad \| x^* - y_{n+1} \| \leq \frac{\tilde{\beta}_n}{1 - \frac{1}{2}\tilde{\beta}_n K_2 \tilde{\xi}_n} \left\{ \frac{1}{6} K_3 + \frac{1}{4} K_2^2 \tilde{\beta}_n + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} K_2^3 \tilde{\beta}_n^2 \frac{2 \tilde{\xi}_n}{1 + \sqrt{1 - 2 \tilde{\beta}_n K_2 \tilde{\xi}_n}} \right\} .$$

$$\cdot \left\{ \frac{2\,\tilde{\varepsilon}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\,\tilde{\beta}_n K_2\,\tilde{\varepsilon}_n}} \right\}^3$$

Dabei seien β_n, ε_n, ν_n, $\hat{\delta}_n$ wie in Satz III.18 angegeben rekursiv definiert und

$$(3.213) \qquad \tilde{\beta}_n := \frac{\beta_n}{1 - \nu_n}$$

$$\tilde{\varepsilon}_n := \frac{\varepsilon_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\,\hat{\delta}_n}{1 - \nu_n}$$

In dieser Form stellt dann (3.212) eine a-priori-Fehlerabschätzung dar.
Setzt man hingegen

$$(3.214) \qquad \tilde{\beta}_n := \|[F'(y_n)]^{-1}\|$$

$$\tilde{\varepsilon}_n := \|[F'(y_n)]^{-1}\|\;\|F(y_n)\|$$

so erhält man eine a-posteriori-Fehlerabschätzung.

Beweis: Dem Satz über die kubische Konvergenz des Halley-Verfahrens (Satz III.11) entnimmt man die Beziehung (3.127):

$$\|x^* - y_{n+1}\| \le \frac{\|[F'(y_n)]^{-1}\|}{1 - \frac{1}{2}\|[F'(y_n)]^{-1}\|\,K_2\,\|c_n\|} \left\{ \frac{1}{6} K_3 + \frac{1}{4} K_2^2 \|[F'(y_n)]^{-1}\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} K_2^3 \|[F'(y_n)]^{-1}\|^2 \|x^* - y_n\| \right\} \|x^* - y_n\|^3$$

Wählt man zunächst die Darstellung (3.214) für $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\varepsilon}_n$, so liefert die Beziehung (1.12) des Beweises von Satz I.4 (Fehlerschranke für das Newton-Verfahren):

$$\|x^* - y_n\| \le \frac{2\,\tilde{\varepsilon}_n}{1 + \sqrt{1 - 2\,\tilde{\beta}_n K_2\,\tilde{\varepsilon}_n}}$$

Hieraus folgt dann unmittelbar (3.212).
Die Darstellung (3.213) ist nun aber eine Abschätzung für die $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\varepsilon}_n$ der Darstellung (3.214), die man sofort aus dem Beweis von Satz III.18 erhält. Damit ist (3.212) auch für (3.213) bewiesen. ∎

Die Voraussetzungen von Satz III.18 sollen nun in Form einfacher Zahlenkombinationen ausgedrückt werden.

Satz III.20: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die dreimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, K_3, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \le \beta_0 \quad ; \quad \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \le \varepsilon_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \|x - x_0\| \le 2\,\varepsilon_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F''(x)\| \le K_2$$

$$\sup_{x \in S_0} \|F'''(x)\| \le K_3$$

Tabelle III/3

μ_o	χ_o	μ_o	χ_o
0.000	6.00000	.050	5.16616
.001	5.98203	.051	5.15069
.002	5.96412	.052	5.13527
.003	5.94626	.053	5.11989
.004	5.92847	.054	5.10455
.005	5.91073	.055	5.08925
.006	5.89305	.056	5.07399
.007	5.87542	.057	5.05878
.008	5.85785	.058	5.04360
.009	5.84034	.059	5.02847
.010	5.82288	.060	5.01338
.011	5.80548	.061	4.99832
.012	5.78813	.062	4.98331
.013	5.77084	.063	4.96834
.014	5.75360	.064	4.95341
.015	5.73641	.065	4.93851
.016	5.71928	.066	4.92366
.017	5.70220	.067	4.90884
.018	5.68517	.068	4.89407
.019	5.66820	.069	4.87933
.020	5.65128	.070	4.86463
.021	5.63441	.071	4.84997
.022	5.61759	.072	4.83534
.023	5.60082	.073	4.82076
.024	5.58410	.074	4.80621
.025	5.56743	.075	4.79170
.026	5.55081	.076	4.77722
.027	5.53424	.077	4.76278
.028	5.51772	.078	4.74838
.029	5.50125	.079	4.73402
.030	5.48483	.080	4.71969
.031	5.46846	.081	4.70540
.032	5.45213	.082	4.69114
.033	5.43585	.083	4.67692
.034	5.41962	.084	4.66274
.035	5.40344	.085	4.64859
.036	5.38730	.086	4.63447
.037	5.37121	.087	4.62039
.038	5.35517	.088	4.60635
.039	5.33917	.089	4.59234
.040	5.32322	.090	4.57836
.041	5.30732	.091	4.56442
.042	5.29145	.092	4.55051
.043	5.27564	.093	4.53663
.044	5.25987	.094	4.52279
.045	5.24414	.095	4.50899
.046	5.22846	.096	4.49521
.047	5.21282	.097	4.48147
.048	5.19722	.098	4.46776
.049	5.18167	.099	4.45408

Tabelle III/3

μ_o	χ_o	μ_o	χ_o
.100	4.44044	.150	3.79621
.101	4.42683	.151	3.78402
.102	4.41325	.152	3.77186
.103	4.39970	.153	3.75972
.104	4.38619	.154	3.74760
.105	4.37271	.155	3.73551
.106	4.35925	.156	3.72344
.107	4.34583	.157	3.71140
.108	4.33244	.158	3.69938
.109	4.31908	.159	3.68739
.110	4.30576	.160	3.67541
.111	4.29246	.161	3.66347
.112	4.27919	.162	3.65154
.113	4.26596	.163	3.63964
.114	4.25275	.164	3.62777
.115	4.23958	.165	3.61592
.116	4.22643	.166	3.60409
.117	4.21331	.167	3.59228
.118	4.20023	.168	3.58050
.119	4.18717	.169	3.56873
.120	4.17414	.170	3.55700
.121	4.16114	.171	3.54528
.122	4.14817	.172	3.53359
.123	4.13523	.173	3.52192
.124	4.12232	.174	3.51027
.125	4.10944	.175	3.49864
.126	4.09658	.176	3.48704
.127	4.08376	.177	3.47546
.128	4.07096	.178	3.46389
.129	4.05819	.179	3.45236
.130	4.04544	.180	3.44084
.131	4.03273	.181	3.42934
.132	4.02004	.182	3.41787
.133	4.00738	.183	3.40642
.134	3.99475	.184	3.39498
.135	3.98214	.185	3.38357
.136	3.96956	.186	3.37218
.137	3.95701	.187	3.36081
.138	3.94448	.188	3.34946
.139	3.93198	.189	3.33814
.140	3.91951	.190	3.32683
.141	3.90707	.191	3.31554
.142	3.89465	.192	3.30428
.143	3.88225	.193	3.29303
.144	3.86988	.194	3.28180
.145	3.85754	.195	3.27060
.146	3.84522	.196	3.25941
.147	3.83293	.197	3.24824
.148	3.82067	.198	3.23709
.149	3.80843	.199	3.22597

Tabelle III/3

μ_o	χ_o	μ_o	χ_o
.200	3.21486	.250	2.68196
.201	3.20377	.251	2.67171
.202	3.19270	.252	2.66147
.203	3.18165	.253	2.65125
.204	3.17062	.254	2.64104
.205	3.15960	.255	2.63084
.206	3.14861	.256	2.62066
.207	3.13764	.257	2.61049
.208	3.12668	.258	2.60034
.209	3.11574	.259	2.59020
.210	3.10482	.260	2.58007
.211	3.09392	.261	2.56995
.212	3.08304	.262	2.55985
.213	3.07217	.263	2.54976
.214	3.06132	.264	2.53969
.215	3.05050	.265	2.52962
.216	3.03968	.266	2.51957
.217	3.02889	.267	2.50954
.218	3.01811	.268	2.49951
.219	3.00736	.269	2.48950
.220	2.99661	.270	2.47950
.221	2.98589	.271	2.46951
.222	2.97518	.272	2.45954
.223	2.96449	.273	2.44957
.224	2.95382	.274	2.43962
.225	2.94317	.275	2.42968
.226	2.93253	.276	2.41975
.227	2.92190	.277	2.40983
.228	2.91130	.278	2.39993
.229	2.90071	.279	2.39003
.230	2.89014	.280	2.38015
.231	2.87958	.281	2.37028
.232	2.86904	.282	2.36042
.233	2.85851	.283	2.35057
.234	2.84801	.284	2.34073
.235	2.83751	.285	2.33090
.236	2.82704	.286	2.32109
.237	2.81658	.287	2.31128
.238	2.80613	.288	2.30148
.239	2.79570	.289	2.29170
.240	2.78529	.290	2.28192
.241	2.77489	.291	2.27215
.242	2.76450	.292	2.26240
.243	2.75413	.293	2.25265
.244	2.74378	.294	2.24291
.245	2.73344	.295	2.23319
.246	2.72311	.296	2.22347
.247	2.71281	.297	2.21376
.248	2.70251	.298	2.20406
.249	2.69223	.299	2.19437

Tabelle III/3

μ_0	χ_0	μ_0	χ_0
.300	2.18469	.350	1.70923
.301	2.17502	.351	1.69983
.302	2.16535	.352	1.69043
.303	2.15570	.353	1.68104
.304	2.14605	.354	1.67164
.305	2.13642	.355	1.66224
.306	2.12679	.356	1.65285
.307	2.11716	.357	1.64345
.308	2.10755	.358	1.63406
.309	2.09795	.359	1.62467
.310	2.08835	.360	1.61527
.311	2.07876	.361	1.60588
.312	2.06918	.362	1.59648
.313	2.05960	.363	1.58709
.314	2.05003	.364	1.57769
.315	2.04047	.365	1.56829
.316	2.03092	.366	1.55890
.317	2.02137	.367	1.54950
.318	2.01183	.368	1.54009
.319	2.00230	.369	1.53069
.320	1.99277	.370	1.52129
.321	1.98325	.371	1.51188
.322	1.97373	.372	1.50247
.323	1.96422	.373	1.49306
.324	1.95472	.374	1.48364
.325	1.94522	.375	1.47422
.326	1.93573	.376	1.46480
.327	1.92625	.377	1.45537
.328	1.91677	.378	1.44594
.329	1.90729	.379	1.43651
.330	1.89782	.380	1.42707
.331	1.88835	.381	1.41763
.332	1.87889	.382	1.40818
.333	1.86944	.383	1.39873
.334	1.85999	.384	1.38927
.335	1.85054	.385	1.37980
.336	1.84109	.386	1.37033
.337	1.83165	.387	1.36086
.338	1.82222	.388	1.35137
.339	1.81279	.389	1.34188
.340	1.80336	.390	1.33239
.341	1.79393	.391	1.32288
.342	1.78451	.392	1.31337
.343	1.77509	.393	1.30385
.344	1.76568	.394	1.29433
.345	1.75626	.395	1.28479
.346	1.74685	.396	1.27524
.347	1.73745	.397	1.26569
.348	1.72804	.398	1.25613
.349	1.71864	.399	1.24655

Tabelle III/3

μ_0	χ_0	μ_0	χ_0
.400	1.23697	.450	.73614
.401	1.22738	.451	.72544
.402	1.21777	.452	.71471
.403	1.20816	.453	.70393
.404	1.19853	.454	.69311
.405	1.18890	.455	.68224
.406	1.17925	.456	.67132
.407	1.16958	.457	.66036
.408	1.15991	.458	.64934
.409	1.15022	.459	.63827
.410	1.14052	.460	.62715
.411	1.13081	.461	.61597
.412	1.12108	.462	.60472
.413	1.11133	.463	.59342
.414	1.10158	.464	.58205
.415	1.09180	.465	.57061
.416	1.08201	.466	.55910
.417	1.07221	.467	.54751
.418	1.06238	.468	.53583
.419	1.05254	.469	.52408
.420	1.04268	.470	.51223
.421	1.03281	.471	.50029
.422	1.02292	.472	.48824
.423	1.01300	.473	.47608
.424	1.00307	.474	.46381
.425	.99312	.475	.45141
.426	.98315	.476	.43888
.427	.97316	.477	.42621
.428	.96314	.478	.41338
.429	.95310	.479	.40038
.430	.94305	.480	.38720
.431	.93296	.481	.37383
.432	.92286	.482	.36024
.433	.91273	.483	.34642
.434	.90258	.484	.33234
.435	.89240	.485	.31799
.436	.88219	.486	.30334
.437	.87196	.487	.28836
.438	.86170	.488	.27301
.439	.85141	.489	.25725
.440	.84109	.490	.24105
.441	.83075	.491	.22435
.442	.82037	.492	.20707
.443	.80996	.493	.18914
.444	.79952	.494	.17044
.445	.78904	.495	.15077
.446	.77854	.496	.12986
.447	.76799	.497	.10717
.448	.75741	.498	.08170
.449	.74680	.499	.05132
		.500	0.00000

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \delta_0$$
$$\chi_0 := \beta_0 K_3 \delta_0^2$$

Haben μ_0 und χ_0 höchstens die Größe der in Tabelle III/3 angegebenen Wertekombinationen, so gilt:

(3.215) Die durch x_0 und

$$x_{n+1} := x_n - \left[I - \frac{1}{2}\left[F'(x_n)\right]^{-1} F''(x_n)\left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)\right]^{-1} \cdot \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)$$

rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

(3.216) Es gilt $F(x^*) = \theta$.

(3.217) Die Gleichung $F(x) = \theta$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz III.18 für die in Tabelle III/3 angegebenen Werte von μ_0 und χ_0 beweist man durch Ausrechnen. Kleinere Werte von μ_0 und χ_0 kann man durch geeignete Vergrößerung der K_2 und K_3 stets auf die Werte von Tabelle III/3 vergrößern. ■

Um zu überprüfen, ob für eine vorgegebene Wertekombination für die μ_0 und χ_0 die Voraussetzungen von Satz III.18 erfüllt sind, wird man sich auch hier zweckmäßig eines Funktionsunterprogrammes bedienen, das in Fortran etwa folgende Gestalt haben kann (der Anwender wählt hier für den Parameter N stets N = 10):

```
      LOGICAL FUNCTION KOVHSM(MUEØ,CHIØ,N)
      REAL MUEØ,CHIØ,NUEØ,LAMØ,XIØ,EPSØ,PIØ
      REAL MUE1,CHI1,NUE1,LAM1,XI1,EPS1,PI1
      REAL A,B,C,A1,B1,C1,S,S1,S2,PHI,PSI
      INTEGER N,K
      IF (MUEØ.GT.Ø.5) GO TO 2Ø
      IF (MUEØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      IF (CHIØ.LT.Ø.Ø) GO TO 2Ø
      NUEØ=Ø.Ø
      LAMØ=Ø.Ø
      XIØ=Ø.Ø
      EPSØ=Ø.Ø
      PIØ=1.Ø
      S=Ø.Ø
      K=Ø
   1Ø CONTINUE
      S1=S+EPSØ
      IF (NUEØ.GE.1.Ø) GO TO 2Ø
      C=MUEØ+(1.Ø+Ø.5*NUEØ)*NUEØ
      C=C/(1.Ø-NUEØ)
      C=C/(1.Ø-NUEØ)
      C=Ø.5*C
      IF (C.GE.1.Ø) GO TO 2Ø
      IF (S1.GT.2.Ø) GO TO 2Ø
      A=1.Ø+Ø.5*NUEØ
      B=1.Ø-NUEØ
      A1=(CHIØ+2.Ø*A*XIØ+A*A*LAMØ)/(6.Ø*B*B*B)
      A1=A1/(1.Ø-C)
      B1=(2.Ø+MUEØ+NUEØ*(Ø.5*MUEØ+Ø.25*NUEØ)/B)*NUEØ/B
      C1=Ø.5*NUEØ*(MUEØ+A*NUEØ)/(B*B*B)
      PHI=A1+B1+C1
```

```
      PSI=A1*A+Ø.5*B1+C1*A
      A=1.Ø-MUEØ-Ø.5*MUEØ*MUEØ
      A=1.Ø/A
      B=Ø.125*MUEØ*MUEØ*MUEØ+Ø.5*MUEØ*MUEØ
      MUE1=A*A*B*MUEØ
      NUE1=A*(PHI*MUEØ+PSI*NUEØ)
      PI1=A*B*PIØ
      EPS1=PHI*PIØ+PSI*EPSØ
      CHI1=A*A*A*B*B*CHIØ
      XI1=A*A*B*(PHI*CØ+PSI*XIØ)
      LAM1=A*A*(PHI*PHI*CHIØ+2.Ø*PHI*PSI*XIØ+PSI*PSI*LAMØ)
      S=S+(1.Ø+Ø.5*MUEØ)*PIØ
      S2=S+EPSØ+(1.Ø+Ø.5*A*A*B*MUEØ)*A*B*PIØ
      IF (NUE1.GT.NUEØ) GO TO 15
      IF (EPS1.GT.EPSØ) GO TO 15
      IF (XI1.GT.XIØ) GO TO 15
      IF (LAM1.GT.LAMØ) GO TO 15
      IF (PSI.GE.1.Ø) GO TO 15
      IF (S2.GT.2.Ø) GO TO 15
      KOVHSM=.TRUE.
      RETURN
   15 K=K+1
      IF (K.GE.N+1) GO TO 2Ø
      MUEØ=MUE1
      CHIØ=CHI1
      NUEØ=NUE1
      PIØ=PI1
      EPSØ=EPS1
      XIØ=XI1
      LAMØ=LAM1
      GO TO 1Ø
   2Ø CONTINUE
      KOVHSM=.FALSE.
      RETURN
      END
```

In Abbildung III/12 auf Seite 166 ist der Konvergenzbereich des Halley-Verfahrens dargestellt, der durch Satz III.18 garantiert wird. Die zu dieser Abbildung gehörende Wertetafel ist die Tabelle III/3 auf den Seiten 159 - 163, in der zu verschiedenen μ_0-Werten die jeweils größten χ_0-Werte angegeben sind, für die die Voraussetzungen von Satz III.18 noch erfüllt sind.
Der Beweis von Satz III.18 behandelt das Halley-Verfahren als ein gestörtes gemischtes Newton-Verfahren. Gerade bei dieser Beweismethode wird die Bedeutung der Methode der retardierten Induktion ganz besonders deutlich. Würde man nämlich versuchen diesen Beweis mit Hilfe der "klassischen" vollständigen Induktion zu führen, so würde man überhaupt kein Ergebnis erhalten. Dies geht aus Abbildung III/13 auf Seite 167 hervor, in der die durch Satz III.18 für verschiedene Werte von N garantierten Konvergenzbereiche für das Halley-Verfahren dargestellt sind. N = 0 würde der "klassischen" Induktionsmethode entsprechen; aber überhaupt erst für N = 1 sind von Null verschiedene χ_0-Werte möglich. Man erkennt deutlich, daß die retardierte Induktion schon für kleine Werte von N eine schnelle Verbesserung der Ergebnisse bringt, wobei diese Verbesserung mit wachsendem N sehr schnell einer "Sättigung" zustrebt. Diese ist hier für N = 3 praktisch erreicht, d.h. die Ergebnisse lassen sich dann mit wachsendem N praktisch nicht weiter verbessern.

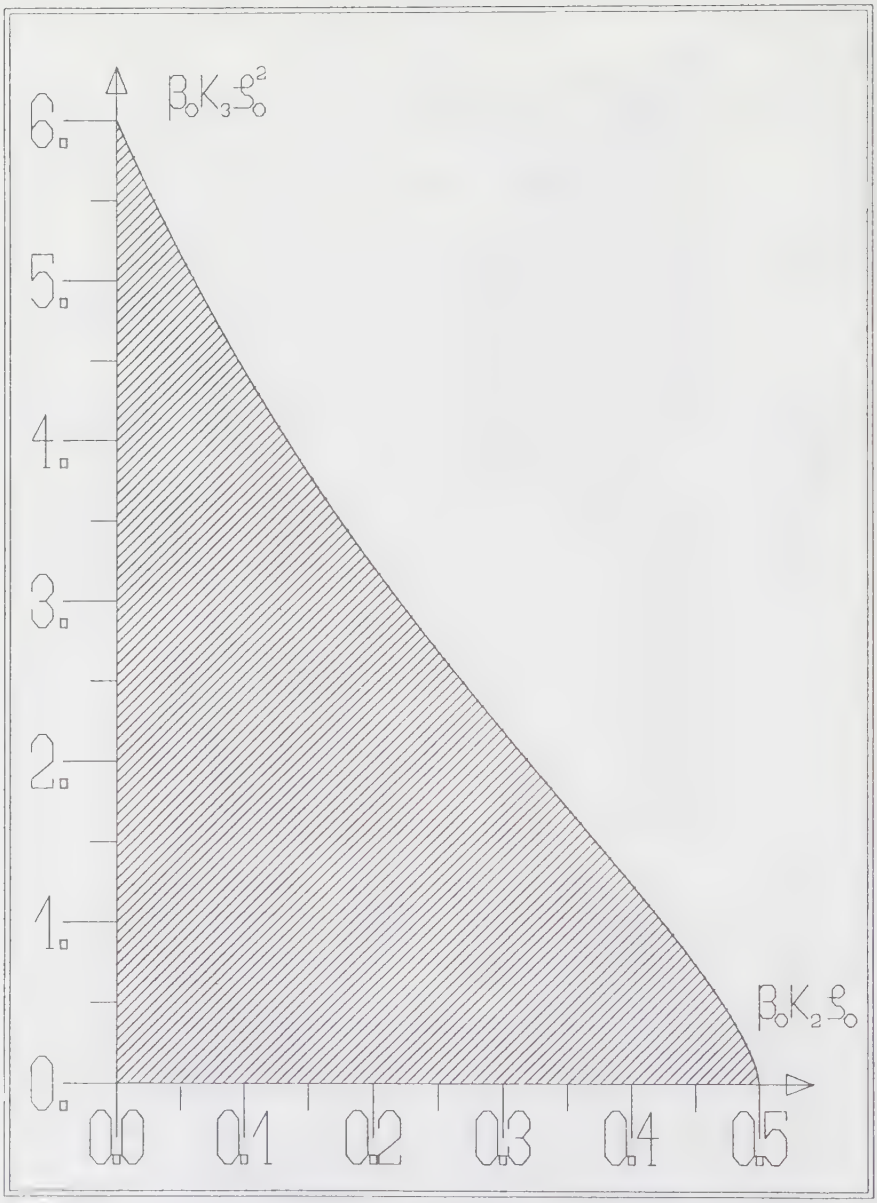


Abbildung III/12

Graphische Darstellung der Menge jener Wertekombinationen von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \xi_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_3 \xi_0^2$, für die Satz III.18 die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Wertekombinationen von μ_0 und χ_0 ist schraffiert.

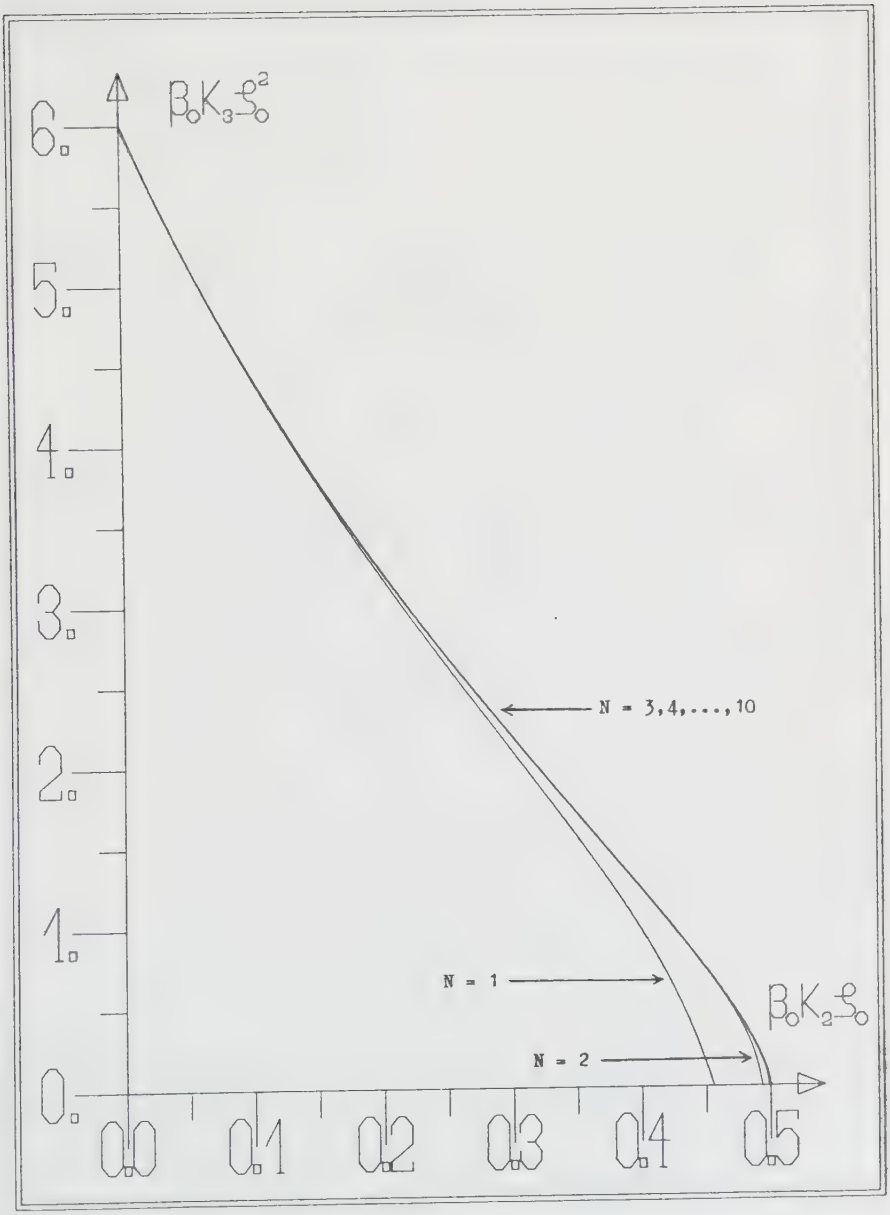


Abbildung III/13

Graphische Darstellung der Menge jener Werte von $\mu_0 := \beta_0 K_2 \xi_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K_3 \xi_0^2$, für die Satz III.18 für verschiedene Wahl von N die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Der Bereich der zulässigen Werte von μ_0 und χ_0 liegt zwischen den jeweiligen Kurven und den Koordinatenachsen.

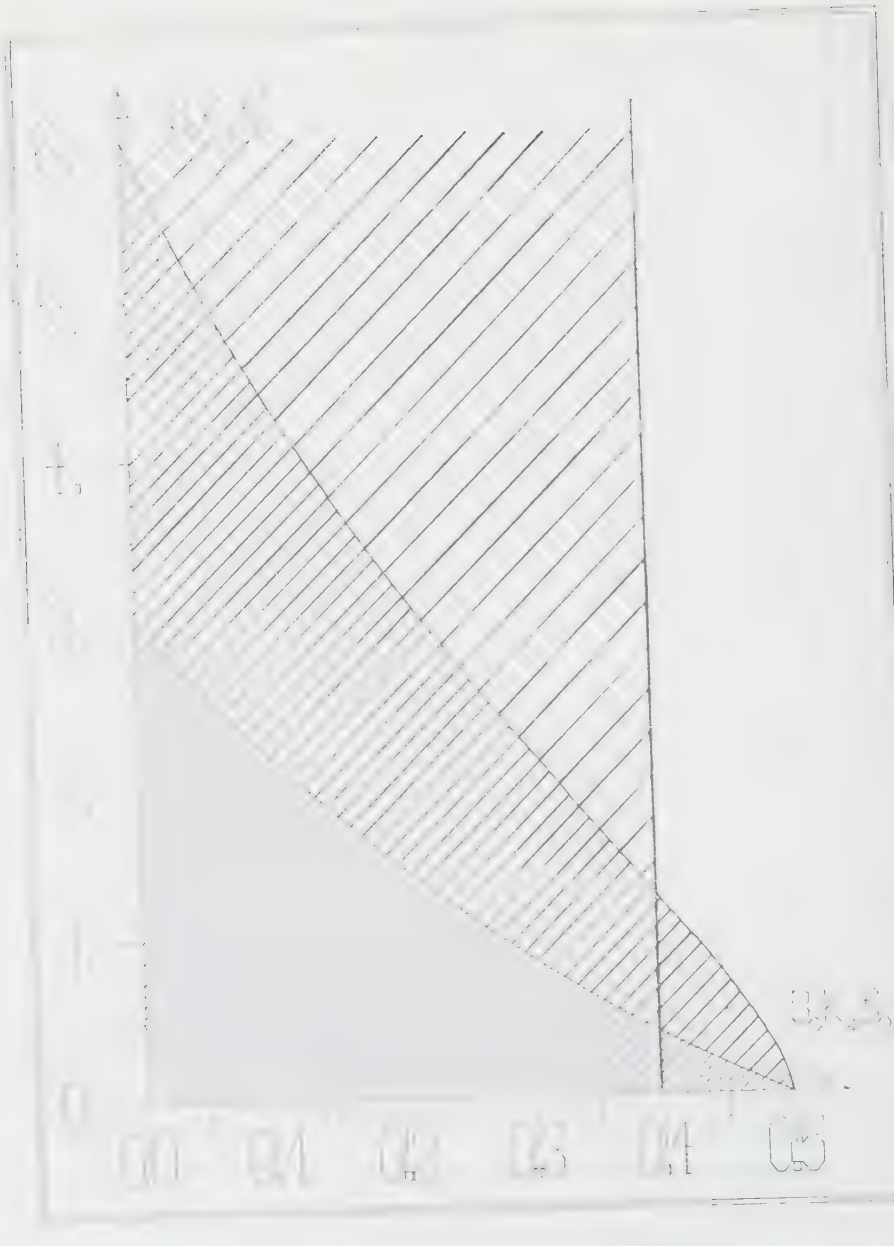


Abbildung III/14

[illegible] Darstellung der Menge jener Werte von $\mu_0 := \lambda_0 K_2 \mathcal{S}_0$ und $\chi_0 := \beta_0 K$ [illegible] für Alg Satz III.10 (obere Kurve) bzw. Satz III.9 mit R = 2 (untere Ku[illegible] a) die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Satz III.13 garantie[illegible] die Konvergenz für $\mu_0 = 0,2007$ ohne Voraussetzungen über $\chi_0 := \beta_0 K_3 \mathcal{S}_0^2$. D[illegible] und χ ist jeweils schraffiert.

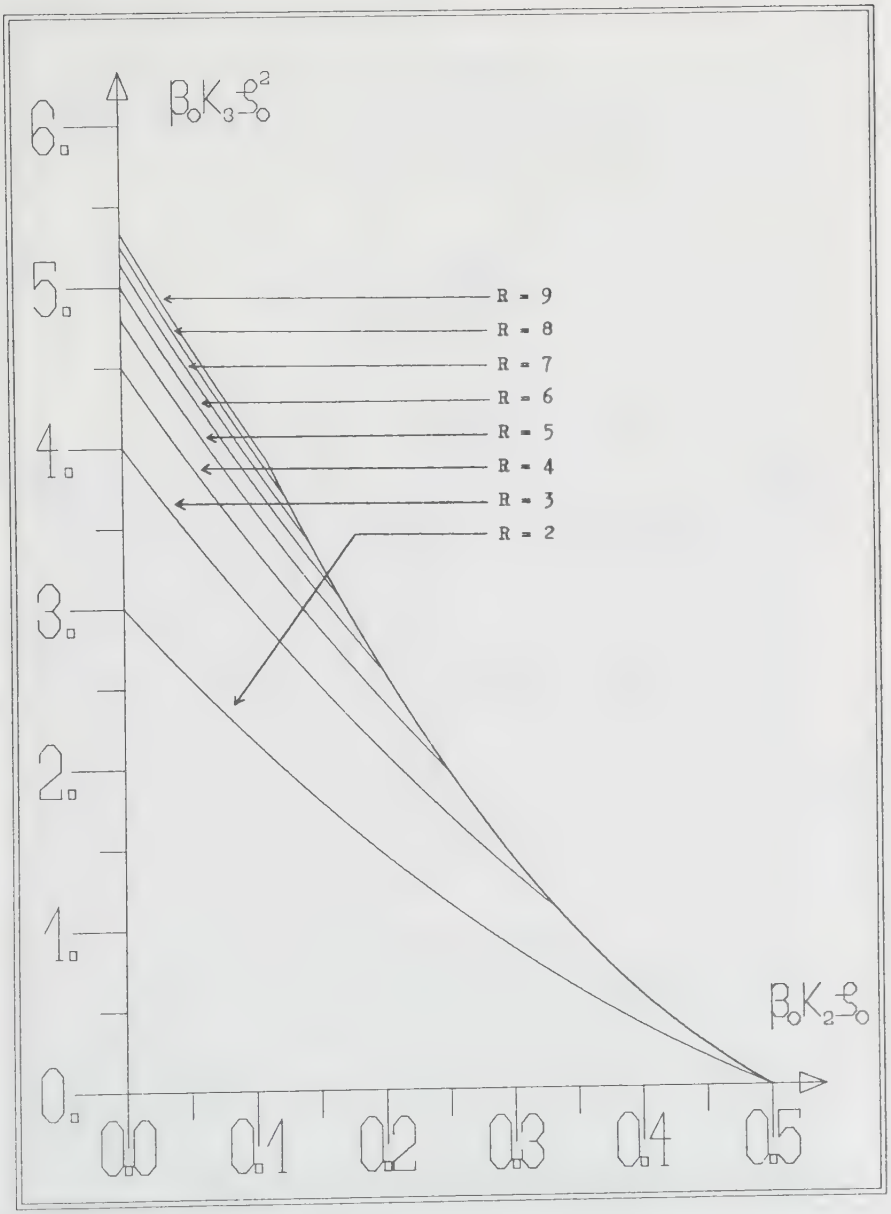


Abbildung III/15

Graphische Darstellung jener Werte von $\mu_o := \beta_o K_1 \xi_o$ und $\chi_o := \beta_o K_3 \xi_o^2$, für die Satz III.10 die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Für die angegebenen Werte von R wird der Bereich der zulässigen Werte für μ_o und χ_o von der jeweiligen Kurve und den Koordinatenachsen eingeschlossen.

In Bezug auf die hier für das Halley-Verfahren erhaltenen Ergebnisse - soweit sie sich in ihren Konvergenzvoraussetzungen lediglich auf den ersten Newton-Schritt beziehen - gelten fast wörtlich die Darlegungen, die in Kapitel II (S. 68 ff.) bezüglich des Tschebyscheff-Verfahrens gemacht wurden. In Abbildung III/14 auf Seite 168 sind noch einmal die Konvergenzbereiche, die durch Satz III.13 bzw. III.18 garantiert werden, im Vergleich zu dem durch Satz III.9 gesicherten Konvergenzbereich graphisch dargestellt.

Ergänzungen: In den Sätzen III.9, III.10 und III.18 kann man die Forderung der dreimaligen stetigen Differenzierbarkeit des Operators F mit

$$\sup_{x \in S_0} \| F'''(x) \| \leq K_3$$

ersetzen durch die etwas schwächere Bedingung der zweimaligen Lipschitz-stetigen Differenzierbarkeit, d.h. es wird gefordert

$$\| F''(y_1) - F''(y_2) \| \leq K_3 \| y_1 - y_2 \| \qquad \forall\, y_1, y_2 \in S_0$$

Die Beweise der Sätze verlaufen dann völlig analog, wie schon in den Ergänzungen zu Kapitel I in Bezug auf das Newton-Verfahren näher ausgeführt wurde. Auch die Konvergenzordnung 3 des Halley-Verfahrens (Satz III.11) bleibt unter diesen Bedingungen erhalten. Ein zu Satz III.13 analoger Satz ließe sich auch für den Fall beweisen, daß die zweite Ableitung F'' von F nicht mehr stetig ist. Man müßte dann allerdings die Lippschitz-Stetigkeit der ersten Ableitung fordern. Hierdurch würde dann nämlich die für Satz III.13 wichtige Konvergenz des Newton-Verfahrens gesichert. Exakt die gleiche Aussage wie in Satz III.13 würde man für diesen Fall jedoch nicht erhalten, da in den Sätzen II.4 und III.12 gewisse Modifikationen notwendig wären. Auch die superquadratische Konvergenz des Halley-Verfahrens, die unter den Bedingungen von Satz III.13 durch Satz III.16 noch garantiert wird, würde bei nicht mehr stetigem F verlorengehen.

Der Abbildung III/15 entnimmt man schließlich noch, wie sich die Konvergenzaussagen von Satz III.10 für verschiedene Werte von R ändern. Die Konvergenzbereiche sind dort für $R = 2,3,\ldots,10$ dargestellt. Man erkennt hier sehr schön, wie sich für $R \to \infty$ die von Döring in [1] als notwendige Bedingung für die Beweisführung errechnete "Grenzkurve" ausbildet.

Bisher ist man überwiegend der Ansicht, das Hauptanwendungsgebiet des Halley-Verfahrens seien einfache Aufgabenstellungen, d.h. Nullstellenbestimmungen bei Abbildungen $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $F:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dies liegt offenbar daran, daß bei komplizierteren Aufgaben das Invertieren entsprechender linearer Operatoren bereits sehr viel Arbeitsaufwand erfordert, so daß das zweimalige Invertieren, das beim Halley-Verfahren je Schritt notwendig ist, trotz der höheren Konvergenzgeschwindigkeit desselben, dieses Verfahren anderen unterlegen erscheinen läßt. Bei reellen oder komplexen Funktionen bedeutet Invertieren naturgemäß praktisch keinen Mehraufwand. Von derartigen Funktionen besitzen speziell in Physik und Technik jene ein besonderes Interesse, die durch lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung definiert sind:

$$F''(x) - p(x)\, F'(x) - q(x)\, F(x) = s(x)$$

mit $F:M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ oder $F:M \to \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{C}$

Zur Lösung der Aufgabe $F(x) = 0$ lautet dann das Halley-Verfahren:

$$(3.218)\qquad x_{n+1} = x_n - \frac{\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}}{1 - \frac{1}{2}\dfrac{1}{F'(x_n)}\,F''(x_n)\,\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}}$$

oder da $F''(x_n) = s(x_n) + p(x_n)\,F'(x_n) + q(x_n)\,F(x_n)$

$$= x_n - \frac{\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}}{1 - \frac{1}{2}\dfrac{1}{F'(x_n)}\left\{s(x_n) + p(x_n)\,F'(x_n) + q(x_n)\,F(x_n)\right\}\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}}$$

$$= x_n - \frac{1}{\dfrac{F'(x_n)}{F(x_n)} - \frac{1}{2}\left[\,p(x_n) + \dfrac{s(x_n)}{F'(x_n)}\,\right] - \frac{1}{2}\,q(x_n)\,\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}}$$

In der Literatur wird darauf hingewiesen, daß diese Iterationsfolge auch dann noch von der Ordnung 3 konvergiert, wenn man den Term

$$\frac{1}{2}\,q(x_n)\,\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

wegläßt, d.h. wenn man lediglich

$$(3.219)\qquad x_{n+1} := x_n - \frac{1}{\dfrac{F'(x_n)}{F(x_n)} - \frac{1}{2}\left[\,p(x_n) + \dfrac{s(x_n)}{F'(x_n)}\,\right]}$$

setzt. Diese Tatsache wird im folgenden Satz gleich in etwas allgemeinerer Form bewiesen. Man beachte hierbei, daß sich die Folge (3.219) ergibt, wenn man in (3.218) statt $F''(x_n)$ setzt

$$A_n := F''(x_n) - q(x_n)\,F(x_n)$$
$$= p(x_n)\,F'(x_n) + s(x_n)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |F''(x_n) - A_n| &\le |q(x_n)|\,|F(x_n)| \\ &= |q(x_n)|\,|F(x_n) - F(x^*)| \\ &\qquad \text{wenn } F(x^*) = 0 \text{ gilt} \\ &\le |q(x_n)| \sup_x |F'(x)|\,|x^* - x_n| \end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt dann, daß die Folge (3.219) unter gewissen Voraussetzungen ebenso von 3. Ordnung konvergiert wie das Halley-Verfahren.

Satz III.21: Sei X ein Banach-Raum und $S \subset X$ offen und konvex. $F: S \to X$ sei eine Abbildung, die auf S dreimal stetig Frechet-differenzierbar ist mit

$$\sup_{x \in S} \|F''(x)\| \le K_2 \quad , \qquad \sup_{x \in S} \|F'''(x)\| \le K_3$$

Es sei $\{A_n\}$ eine Folge bilinearer Operatoren

$$A_n : X \times X \to X$$

Die durch $x_0 \in S$ und

$$x_{n+1} := x_n - \left[I - \tfrac{1}{2}\left[F'(x_n)\right]^{-1} A_n \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)\right]\left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)$$

rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiere und es gelte $x_n \in S \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in S$ und $F(x^*) = \theta$. Die Inversen $[F'(x_n)]^{-1}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt. Für die Operatoren A_n gelte

$$\|F''(x_n) - A_n\| \le K \|x^* - x_n\| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

und

$$\tfrac{1}{2}\,\|[F'(x_n)]^{-1}\|\,\|A_n\|\,\|[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\| < 1$$

Dann konvergiert die Folge $\{x_n\}$ von der Ordnung 3.

Beweis: Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$F_n := F(x_n) \;;\; F_n' := F'(x_n) \;;\; F_n'' := F''(x_n) \;;\; F_n'^{-1} := [F'(x_n)]^{-1}$$

$$c_n := -[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \;;\; e_n := x_{n+1} - x_n \;;\; e_n^* := x^* - x_n$$

dann gilt

$$F_n + F_n' c_n = \theta \tag{3.220}$$

$$F_n + F_n' e_n + \tfrac{1}{2} A_n c_n e_n = \theta \tag{3.221}$$

und

$$\begin{aligned}
\|x^* - x_{n+1}\| &= \|x^* - x_n - e_n\| \\
&= \left\|\left[I + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} A_n c_n\right]^{-1}\left\{\left[I + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} A_n c_n\right] e_n^* - c_n\right\}\right\| \\
&\le \left\|\left[I + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} A_n c_n\right]^{-1}\right\| \|F_n'^{-1}\| \left\|F_n + F_n' e_n^* + \tfrac{1}{2} A_n c_n e_n^* - F(x^*)\right\| \\
&\le \left\|\left[I + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} A_n c_n\right]^{-1}\right\| \|F_n'^{-1}\| \left\{\left\|F_n + F_n' e_n^* + \tfrac{1}{2} A_n e_n^{*(2)} - F(x^*)\right\| + \right. \\
&\quad \left. + \left\|\tfrac{1}{2} A_n e_n^* [e_n^* - c_n]\right\|\right\} \\
&\le \left\|\left[I + \tfrac{1}{2} F_n'^{-1} A_n c_n\right]^{-1}\right\| \|F_n'^{-1}\| \left\{\left\|F_n + F_n' e_n^* + \tfrac{1}{2} F_n'' e_n^{*(2)} - F(x^*)\right\| + \right. \\
&\quad \left. + \tfrac{1}{2}\left\|F_n'' - A_n\right\| \|e_n^*\| + \tfrac{1}{2}\|A_n\| \|e_n^*\| \|e_n^* - c_n\|\right\}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\|e_n^* - c_n\| &= \|e_n^* + F_n'^{-1} F_n\| \\
&\le \|F_n'^{-1}\| \|F_n + F_n' e_n^* - F(x^*)\| \\
&\le \|F_n'^{-1}\| \tfrac{1}{2} K_2 \|e_n^*\|^2
\end{aligned}$$

$$\|F_n'' - A_n\| \le K \|e_n^*\| \qquad \text{(nach Voraussetzung)}$$

Also:

$$\|x^* - x_{n+1}\| \le \frac{\|F_n'^{-1}\|}{1 - \tfrac{1}{2}\|F_n'^{-1}\| \|A_n\| \|c_n\|} \left\{\tfrac{1}{6} K_3 \|e_n^*\|^3 + \tfrac{1}{2} K \|e_n^*\|^3 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\|A_n\| \|F_n'^{-1}\| \tfrac{1}{2} K_2 \|e_n^*\|^3\right\}$$

Mit $\|A_n\| \le \|A_n - F_n''\| + \|F_n''\| \le K \|e_n^*\| + K_2$

folgt hieraus die Behauptung. ∎

Zu dem Verfahren (3.219) kann man leicht verschiedene Arten von Konvergenzsätzen angeben. Dafür bieten sich insbesondere die in dieser Arbeit mehrfach verwendeten Beweismethoden an. Man kann (3.219) entweder als "gestörtes" Newton-Verfahren oder auch als "gestörtes" Halley-Verfahren behandeln. In beiden Fällen hätte man jedoch mit gewissen Genauigkeitsverlusten gegenüber den "ungestörten" Verfahren zu rechnen. Da die Iterationsvorschrift (3.219) gegenüber (3.218) praktisch keine rechentechnischen Vorteile oder Vorteile in Bezug auf den Arbeitsaufwand bringt, soll auf derartige Konvergenzsätze verzichtet werden.

Literatur:

[1] Döring, B. — Einige Sätze über das Verfahren der tangierenden Hyperbeln in Banach-Räumen. Aplikace Matematiky 15 (1970), 419 - 464.

[2] Janko, B. — Über die verallgemeinerte Methode der tangierenden Hyperbeln. (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (Cluj) 13 (1962), 301 - 308.

[3] Janko, B. — Über die Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen nach der verallgemeinerten Methode der tangierenden Hyperbeln (I). (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (Cluj) 14 (1963), 265 - 271.

[4] Janko, B. Balazs, M. — Über die Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen nach der verallgemeinerten Methode der tangierenden Hyperbeln (II). (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (Bucuresti) 18 (1966), 817 - 828.

[5] Janko, B. Pop, V. — Über die Methode der tangierenden Hyperbeln zur Lösung von nichtlinearen Operatorgleichungen. (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (Bucuresti) 18 (1966), 1147 - 1153.

[6] Lang, S. — Analysis II Addison-Wesley. Reading/Mass. 1969

[7] Mertvecova, M. A. — Ein Analogon der Methode der tangierenden Hyperbeln. (Russ.) DAN SSSR 88 (1953), 611 - 614.

[8] Mirakov, V. E. — Über die Konvergenz der Methode der tangierenden Hyperbeln für nichtlineare Funktionalgleichungen unter Bedingungen von Cauchyschen Typ. Trudy Moskovsk. Inst. Fiz.-Techn. 1 (1958), 204 - 213.

[9] Safiev, R. A. — The method of tangent hyperbolas. (Russ.) DAN SSSR 149 (1963), 788 - 791. Engl. Übersetzung: Sov. Math. Dokl. 4 (1963) 482 - 485.

Kapitel IV

Einige Sätze zu Verfahren
4. und 5. Ordnung

In diesem Kapitel sollen noch zwei Iterationsverfahren höherer Ordnung, nämlich eines vierter und eines fünfter Ordnung angegeben und untersucht werden. Im Hinblick auf ihre praktische Brauchbarkeit sind diese Verfahren in Analogie zum Tschebyscheff-Verfahren konstruiert, so daß für einen Schritt lediglich eine Inversion notwendig ist. Ausserdem enthält die Iterationsvorschrift in beiden Fällen nur Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, wodurch einerseits die konkrete Anwendung im Vergleich zu Verfahren höherer Ordnung, die auch entsprechend höhere Ableitungen enthalten, erleichtert wird, und andererseits auch erreicht wird, daß zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen nur die zweite Ableitung des betrachteten Operators abgeschätzt werden muß. Die tatsächliche Konvergenzordnung dieser Verfahren hängt allerdings von der Existenz und Beschränktheit der höheren Ableitungen ab; dabei ist jedoch die Überprüfung von Differenzierbarkeitseigenschaften sicher erheblich einfacher als eine tatsächliche Abschätzung von Operatornormen über einen gegebenen Bereich.

Es soll zunächst ein Verfahren vierter Ordnung betrachtet werden.

Satz IV.1: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq \beta_0 \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \leq \delta_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \| x - x_0 \| \leq 2\delta_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \delta_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

Überdies gelte: (Hierdurch wird $\mu_0 \leq \frac{1}{2}$ weiter eingeschränkt!)
Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch

(4.1) μ_0 sowie $\nu_0 := 0$, $\varepsilon_0 := 0$, $\pi_0 := 1$ und

(4.2) $$\omega_n := \frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1 - \nu_n)^2}$$

(4.3) $$\alpha_n := \tfrac{1}{2}\omega_n (1 + \tfrac{1}{2}\omega_n)^2$$

(4.4) $$\varphi_n := \frac{\alpha_n + \nu_n}{1 - \nu_n}$$

(4.5) $$\psi_n := \frac{\frac{1}{2}\nu_n (1 + \alpha_n)}{1 - \nu_n}$$

$$(4.6)\qquad \mu_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\,\mu_n^2}{(1-\mu_n)^2}$$

$$(4.7)\qquad \nu_{n+1} := \frac{1}{1-\mu_n}\,(\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n)$$

$$(4.8)\qquad \pi_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\,\mu_n}{1-\mu_n}\,\pi_n$$

$$(4.9)\qquad \varepsilon_{n+1} := \varphi_n \pi_n + \psi_n \varepsilon_n$$

rekursiv definierten Zahlen μ_n, ν_n, ε_n, π_n, ω_n, α_n, φ_n, ψ_n für $n \le N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

$$(4.10)\qquad \nu_n < 1 \qquad \forall\ n \le N$$

$$(4.11)\qquad \varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k + \frac{1}{3}\,(1+\tfrac{1}{2}\,\omega_n)\,\frac{\pi_n + (1+\frac{1}{2}\,\nu_n)\,\varepsilon_n}{1-\nu_n} \le 2$$

$$(4.12)\qquad \nu_{N+1} \le \nu_N$$

$$(4.13)\qquad \varepsilon_{N+1} \le \varepsilon_N$$

$$(4.14)\qquad \psi_N < 1$$

$$(4.15)\qquad \varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \frac{1}{3}\,(1+\tfrac{1}{2}\,\omega_N)\,\frac{\pi_N + (1+\frac{1}{2}\,\nu_N)\,\varepsilon_N}{1-\nu_N} + \frac{\frac{1}{2}\,\mu_N}{1-\frac{3}{2}\,\mu_N} \le 2$$

Dann gilt:

(4.16) Die durch $y_0 := x_0$ und

$$t(y_n) := -\left[F'(y_n)\right]^{-1} F(y_n) - \tfrac{1}{2}\left[F'(y_n)\right]^{-1} F''(y_n)\left[\left[F'(y_n)\right]^{-1} F(y_n)\right]^{(2)}$$

$$y_{n+1} := y_n - \left[F'(y_n)\right]^{-1} F(y_n) - \tfrac{1}{2}\left[F'(y_n)\right]^{-1} F''(y_n + \tfrac{1}{3}\,t(y_n))\,t(y_n)^{(2)}$$

rekursiv definierte Folge $\{y_n\}$ existiert, es gilt $y_n \in S_0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x^*$.

(4.17) Es gilt $F(x^*) = 0$.

(4.18) Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Zusätzlich zu den durch (4.1) - (4.9) definierten Folgen werden noch die durch

$$(4.19)\qquad \beta_0,\ \delta_0 \text{ sowie } \hat{\delta}_0 := 0 \text{ und}$$

$$(4.20)\qquad \beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1-\mu_n}$$

$$(4.21)\qquad \delta_{n+1} := \frac{1}{2}\,\frac{\mu_n}{1-\mu_n}\,\delta_n$$

$$(4.22)\qquad \hat{\delta}_{n+1} := \varphi_n \delta_n + \psi_n \hat{\delta}_n$$

rekursiv definierten Folgen $\{\beta_n\}$, $\{\mathcal{S}_n\}$, $\{\hat{\delta}_n\}$ eingeführt.

Es wird zunächst gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (4.1) - (4.9) und (4.19) - (4.22) definierten Zahlen μ_n, ν_n, π_n, ε_n, ω_n, α_n, $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{Y}_n$, β_n, $\mathcal{S}_n$, $\hat{\delta}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, sowie:

(4.23) $\mu_n \geq 0$, $\mu_{n+1} \leq \mu_n$, $\mu_n = \beta_n K_2 \mathcal{S}_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.24) $\nu_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\nu_{n+1} \leq \nu_n$ $\forall\, n \geq N$

(4.25) $\pi_n \geq 0$, $\pi_{n+1} \leq \frac{1}{2}\pi_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.26) $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$ $\forall\, n \geq N$

(4.27) $\omega_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\omega_{n+1} \leq \omega_n$ $\forall\, n \geq N$

(4.28) $\alpha_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ $\forall\, n \geq N$

(4.29) $\beta_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.30) $\mathcal{S}_n \geq 0$, $\mathcal{S}_{n+1} \leq \frac{1}{2}\mathcal{S}_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.31) $\hat{\delta}_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.32) $\mathcal{P}_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.33) $\mathcal{Y}_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Denn: Da die Voraussetzungen des Satzes über das Newton-Verfahren (Satz I.2) erfüllt sind, erhält man aus Teil (A) des dortigen Beweises die Existenz von $\{\mu_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\mathcal{S}_n\}$ sowie die Aussagen (4.23), (4.29), (4.30). Aus (4.8) und (4.23) folgt (4.25). Die Aussagen (4.24), (4.26) und (4.27), (4.28), (4.32) sowie (4.33) erhält man aus (4.6), (4.7) sowie (4.10), wenn man unter Beachtung von (4.12) und (4.13) berücksichtigt, daß die durch (4.2) - (4.5) definierten Ausdrücke

$$\omega_n = \omega_n(\mu_n, \nu_n)$$
$$\alpha_n = \alpha_n(\omega_n) = \alpha_n(\mu_n, \nu_n)$$
$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\alpha_n, \nu_n) = \mathcal{P}_n(\mu_n, \nu_n)$$
$$\mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}_n(\alpha_n, \nu_n) = \mathcal{Y}_n(\mu_n, \nu_n)$$

für $0 \leq \nu_n < 1$ sowie $\mu_n \geq 0$ positiv oder Null sind und unter diesen Bedingungen in μ_n, ν_n monoton fallen, d.h.:

Aus $0 \leq \nu_n < 1$, $0 \leq \nu_{n+1} < 1$, $\mu_n \geq 0$, $\mu_{n+1} \geq 0$

$$\mu_{n+1} \leq \mu_n \quad , \quad \nu_{n+1} \leq \nu_n$$

folgt $\omega_{n+1} \leq \omega_n$ und somit $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ und hieraus wiederum

$$\mathcal{P}_{n+1} \leq \mathcal{P}_n \quad , \quad \mathcal{Y}_{n+1} \leq \mathcal{Y}_n$$

(4.31) ergibt sich dann aber unmittelbar aus (4.22). Aus (4.23), (4.24) sowie (4.14) erhält man schließlich noch

(4.34) $\mathcal{Y}_n \leq \mathcal{Y}_N < 1$ $\forall\, n \geq N$

(4.35) $\mathcal{P}_n \leq \mathcal{P}_N$ $\forall\, n \geq N$

Für den weiteren Beweis werden nun folgende Bezeichnungen verwendet:

$$N(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x)$$
$$t(x) := -[F'(x)]^{-1} F(x) - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)\big[[F'(x)]^{-1} F(x)\big]^{(2)}$$
$$R(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x) - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''\big(x + \tfrac{1}{3}t(x)\big)\, t(x)^{(2)}$$
$$\beta(x) := \|[F'(x)]^{-1}\|$$

$$\gamma(x) := \|[F'(x)]^{-1} F(x)\|$$

$$\mathcal{S}(x) := \|[F'(x)]^{-1}\| \, \|F(x)\|$$

$$\mu(x) := \beta(x) K_2 \gamma(x)$$

Der Satz über das Newton-Verfahren liefert nun die Aussagen:

(4.36) Die durch x_0 und $x_{n+1} := N(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert und es gilt $x_n \in S_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Außerdem existiert ein $x^* \in S_0$ mit $x_n \to x^*$ und $F(x^*) = \theta$, wobei x^* die einzige Lösung der Gleichung $F(x) = \theta$ in S_0 ist.

Weiter entnimmt man dem Beweis (Teil (B)) des Satzes über das Newton-Verfahren (Satz I.2) die Abschätzungen:

(4.37)
$$\begin{cases} \beta(x_n) \le \beta_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \mathcal{S}(x_n) \le \mathcal{S}_n & \forall\, n \ge 1 \\ \beta_n K_2 \mathcal{S}_n = \mu_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \|x_{n+1} - x_n\| \le \mathcal{S}_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die durch das hier betrachtete Verfahren erzeugte Iterationsfolge (deren Existenz noch gezeigt werden muß!) werde mit $\{y_n\}$ bezeichnet.

D.h. $y_0 := x_0$ und $y_{n+1} := R(y_n)$

Weiter sei $\Delta x_n := y_n - x_n$; d.h. $\Delta x_0 = \theta$, da $y_0 := x_0$

Es wird nun gezeigt: Die Folge $\{y_n\}$ existiert und es gilt $y_n \in S_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Hierfür genügt es durch vollständige Induktion nach n zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(Ind 1)$_n$ $\|\Delta x_n\| \le \hat{\delta}_n$

(Ind 2)$_n$ $\hat{\delta}_n \le \varepsilon_n \mathcal{S}_0$; $\mathcal{S}_n \le \pi_n \mathcal{S}_0$

(Ind 3)$_n$ $y_n \in S_0$

(Ind 4)$_n$ $\beta_n K_2 \hat{\delta}_n = \nu_n < 1$

(Ind 5) $[F'(y_n)]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$$\|[F'(y_n)]^{-1}\| \le \frac{\beta_n}{1 - \beta_n K_2 \hat{\delta}_n} = \frac{\beta_n}{1 - \nu_n}$$

(Ind 6)$_n$ $y_n + \frac{1}{3} t(y_n) \in S_0$

Die Induktionsverankerung ergibt sich unmittelbar aus den Voraussetzungen und Definitionen, da

$$\|t(y_0)\| \le \mathcal{S}_0 + \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 \mathcal{S}_0^2 = (1 + \tfrac{1}{2} \mu_0) \mathcal{S}_0 \le \tfrac{5}{4} \mathcal{S}_0$$

Schluß von n auf n+1: Wegen (Ind 3)$_n$, (Ind 5)$_n$ existiert $y_{n+1} := R(y_n)$. Unter Verwendung von (Ind 1)$_n$, (Ind 4)$_n$ sowie (4.37) und unter Heranziehung von (2.32), (2.33) aus Satz II.4 erhält man:

$$\begin{aligned} \|\Delta x_{n+1}\| &= \|y_{n+1} - x_{n+1}\| = \|R(y_n) - N(x_n)\| \\ &\le \|R(x_n + \Delta x_n) - N(x_n + \Delta x_n)\| + \|N(x_n + \Delta x_n) - N(x_n)\| \\ &\le \tfrac{1}{2} \beta(x_n + \Delta x_n) K_2 \|t(x_n + \Delta x_n)\|^2 + \frac{\beta_n K_2 \nu_n (\mathcal{S}_n + \frac{1}{2} \hat{\delta}_n)}{1 - \beta_n K_2 \hat{\delta}_n} \end{aligned}$$

Wegen

(4.38) $$\|t(x_n + \Delta x_n)\| \le \gamma(x_n + \Delta x_n) + \tfrac{1}{2} \beta(x_n + \Delta x_n) K_2 \gamma^2(x_n + \Delta x_n)$$

$$= \left(1 + \tfrac{1}{2}\,\mu(x_n + \Delta x_n)\right) \gamma(x_n + \Delta x_n)$$

und

$$(4.39) \qquad \mu(x_n + \Delta x_n) \le \frac{\mu_n + \left(1 + \frac{1}{2}\,\nu_n\right)\nu_n}{(1 - \nu_n)^2} =: \omega_n$$

gilt somit

$$\|\Delta x_{n+1}\| \le \tfrac{1}{2}\,\omega_n\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\omega_n\right)^2 \frac{\varepsilon_n + \left(1 + \frac{1}{2}\,\nu_n\right)\hat{\delta}_n}{1 - \nu_n} + \frac{\nu_n\left(\varepsilon_n + \frac{1}{2}\,\hat{\delta}_n\right)}{1 - \nu_n}$$

$$= \frac{\lambda_n + \nu_n}{1 - \nu_n}\,\varepsilon_n + \frac{\frac{1}{2}\,\nu_n\,\lambda_n + \frac{1}{2}\,\nu_n}{1 - \nu_n}\,\hat{\delta}_n$$

$$= \varphi_n\,\varepsilon_n + \psi_n\,\hat{\delta}_n$$

$$= \hat{\delta}_{n+1}$$

wegen (4.2) - (4.5) und (4.22). Hieraus folgt $(\text{Ind } 1)_{n+1}$.
Aus $(\text{Ind } 2)_n$ folgt:

$$\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n\,\varepsilon_n + \psi_n\,\hat{\delta}_n \le \left(\varphi_n\,\pi_n + \psi_n\,\varepsilon_n\right)\varepsilon_0 = \varepsilon_{n+1}\,\varepsilon_0 \qquad \text{nach (4.9)}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\mu_n}{1 - \mu_n}\,\varepsilon_n \le \tfrac{1}{2}\,\frac{\mu_n}{1 - \mu_n}\,\pi_n\,\varepsilon_0 = \pi_{n+1}\,\varepsilon_0 \qquad \text{nach (4.8)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 2)_{n+1}$.
Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ und $(\text{Ind } 2)_{n+1}$ sowie (4.6), (4.23) und (4.37) erhält man:

$$(4.40) \quad \|y_{n+1} - x_0\| \le \|y_{n+1} - x_{n+1}\| + \sum_{K=0}^{n} \|x_{K+1} - x_K\|$$

$$\le \hat{\delta}_{n+1} + \sum_{K=0}^{n} \varepsilon_K \le \left(\varepsilon_{n+1} + \sum_{K=0}^{n} \pi_K\right)\varepsilon_0$$

Für $n+1 \le N$ folgt hieraus nach (4.11)

$$\|y_{n+1} - x_0\| \le 2\,\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} \in S$$

Ist nun $n+1 > N$, so hat man:

$$(4.41) \quad \|y_{n+1} - x_0\| \le \left(\varepsilon_{n+1} + \sum_{K=0}^{n} \pi_K\right)\varepsilon_0$$

$$\le \left(\varepsilon_N + \sum_{K=0}^{\infty} \pi_K\right)\varepsilon_0 \qquad \text{wegen (4.25), (4.26)}$$

$$\le \left(\varepsilon_N + \sum_{K=0}^{N} \pi_K + \sum_{K=N+1}^{\infty} \pi_K\right)\varepsilon_0$$

$$\le \left(\varepsilon_N + \sum_{K=0}^{N} \pi_K + \frac{\frac{1}{2}\,\mu_N}{1 - \mu_N}\,\pi_N \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}\,\mu_N}{1 - \mu_N}\right)^K\right)\varepsilon_0$$

wegen (4.8), (4.23)

$$\le \left(\varepsilon_N + \sum_{K=0}^{N} \pi_K + \frac{\frac{1}{2}\,\mu_N}{1 - \frac{3}{2}\,\mu_N}\,\pi_N\right)\varepsilon_0$$

$$\le 2\,\varepsilon_0 \qquad \text{wegen (4.15)}$$

Also gilt auch in diesem Falle $y_{n+1} \in S_0$. Daraus folgt $(\text{Ind } 3)_{n+1}$.

Mit (4.20), (4.22) und $(\text{Ind } 4)_n$ folgt:

$$\beta_{n+1} K_2 \hat{\delta}_{n+1} = \frac{\beta_n K_2}{1 - \mu_n} (\varphi_n \delta_n + \psi_n \hat{\delta}_n) = \frac{1}{1 - \mu_n} (\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n)$$

$$= \nu_{n+1} \qquad \text{nach (4.7)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 4)_{n+1}$.
Unter Beachtung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$, $(\text{Ind } 4)_{n+1}$ und

$$[F'(y_{n+1})]^{-1} = [F'(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})]^{-1}$$

erhält man unter Heranziehung von Satz II.4 $(\text{Ind } 5)_{n+1}$.
Aus $(\text{Ind } 5)_{n+1}$ folgt die Existenz von $t(y_{n+1})$.

$$\| t(y_{n+1}) \| \leq \gamma^*(y_{n+1}) + \tfrac{1}{2} \beta(y_{n+1}) K_2 \gamma^2(y_{n+1})$$

Nach (4.38), (4.39) gilt

$$(4.42) \quad \| t(y_{n+1}) \| = \| t(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \| \leq (1 + \tfrac{1}{2} \omega_n) \frac{\delta_n + (1 + \frac{1}{2} \nu_n) \hat{\delta}_n}{1 - \nu_n}$$

Somit nach (4.40), (4.42):

$$\| y_{n+1} + \tfrac{1}{3} t(y_{n+1}) - x_0 \| \leq \| y_{n+1} - x_0 \| + \tfrac{1}{3} \| t(y_{n+1}) \|$$

$$\leq (\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \pi_k) \delta_0 + \tfrac{1}{3} (1 + \tfrac{1}{2} \omega_n) \frac{\pi_n + (1 + \frac{1}{2} \nu_n) \varepsilon_n}{1 - \nu_n} \delta_0$$

Für $n+1 \leq N$ folgt hieraus nach (4.11):

$$\| y_{n+1} + \tfrac{1}{3} t(y_{n+1}) - x_0 \| \leq 2 \delta_0 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} + \tfrac{1}{3} t(y_{n+1}) \in S_0$$

Ist $n+1 > N$, so hat man nach (4.41):

$$\| y_{n+1} + \tfrac{1}{3} t(y_{n+1}) - x_0 \| \leq (\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \frac{\frac{1}{2} \mu_N}{1 - \frac{3}{2} \mu_N} \pi_N) \delta_0 +$$

$$+ \tfrac{1}{3} (1 + \tfrac{1}{2} \omega_N) \frac{\pi_N + (1 + \frac{1}{2} \nu_N) \varepsilon_N}{1 - \nu_N} \delta_0$$

wegen (4.24) - (4.26)

$$\leq 2 \delta_0 \qquad \text{wegen (4.15)}$$

Also gilt auch in diesem Falle $y_{n+1} + \tfrac{1}{3} t(y_{n+1}) \in S_0$.
Damit ist $(\text{Ind } 6)_{n+1}$ bewiesen.
Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Nun ist für $n \geq N$ nach (4.34), (4.35):

$$\psi_n \leq \psi_N < 1 \quad \text{und} \quad \varphi_n \leq \varphi_N \quad \text{d.h.}$$

$$\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \delta_n + \psi_n \hat{\delta}_n \leq \varphi_N \delta_n + \psi_N \hat{\delta}_n$$

Wegen $\psi_N < 1$ erhält man aus Satz II.5

$$\lim_{n \to \infty} \hat{\delta}_n = 0$$

d.h. $\| y_n - x_n \| \to 0$, d.h. da $x_n \to x^*$ nach (4.36) gilt, gilt auch $y_n \to x^*$.

Zusammen mit (4.36) folgen hieraus die Behauptungen.
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Die etwas unübersichtlichen Voraussetzungen von Satz IV.1 sollen nun als einfache Zahl ausgedrückt werden.

Satz IV.2: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq \beta_0 \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \leq \delta_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \| x - x_0 \| \leq 2\delta_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \delta_0 \leq 0.3979$$

Dann gilt:

(4.43) Die durch x_0 und

$$t(x_n) := - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{2} [F'(x_n)]^{-1} F''(x_n) [[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)}$$

$$x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{2} [F'(x_n)]^{-1} F''(x_n + \tfrac{1}{3} t(x_n))\, t^{(2)}(x_n)$$

rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$.

(4.44) Es gilt $F(x^*) = \theta$.

(4.45) Die Gleichung $F(x) = \theta$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Für $\mu_0 = 0.3979$ beweist man die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz IV.1 durch Ausrechnen. Kleinere Werte von μ_0 lassen sich durch geeignete Vergrößerung von K_2 stets auf 0.3979 vergrößern. ■

Konvergenzordnung: Völlig analog wie im Anschluß an den folgenden Satz für das dort angegebene Verfahren die Konvergenzordnung 5 nachgewiesen wird, kann man auch für das soeben untersuchte Verfahren leicht zeigen, daß es von der Ordnung 4 konvergiert, sofern der Operator F viermal stetig differenzierbar ist. Ist hingegen F nur drei- bzw. zweimal stetig differenzierbar, so erhält man immerhin noch kubische bzw. quadratische Konvergenz.

Es soll nun schließlich noch ein Verfahren betrachtet werden, das unter gewissen Bedingungen von fünfter Ordnung konvergiert.

Satz IV.3: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq \beta_0 \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \leq \delta_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \| x - x_0 \| \leq 2\delta_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \leq K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \delta_0 \leq \tfrac{1}{2}$$

Überdies gelte: (Hierdurch wird $\mu_0 \leq \frac{1}{2}$ weiter eingeschränkt!)
Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die durch

(4.46) μ_0 sowie $\nu_0 := 0$, $\varepsilon_0 := 0$, $\pi_0 := 1$ und

$$(4,47)\qquad \omega_n := \frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2}\nu_n)\nu_n}{(1-\nu_n)^2}$$

$$(4.48)\qquad \alpha_n := \tfrac{1}{2}\omega_n(1 + \tfrac{1}{2}\omega_n(1 + \tfrac{1}{2}\omega_n)^2)^2$$

$$(4.49)\qquad \varphi_n := \frac{\alpha_n + \nu_n}{1-\nu_n}$$

$$(4.50)\qquad \psi_n := \frac{\frac{1}{2}\nu_n(1+\alpha_n)}{1-\nu_n}$$

$$(4.51)\qquad \mu_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\mu_n^2}{(1-\mu_n)^2}$$

$$(4.52)\qquad \nu_{n+1} := \frac{1}{1-\mu_n}(\varphi_n\mu_n + \psi_n\nu_n)$$

$$(4.53)\qquad \pi_{n+1} := \frac{\frac{1}{2}\mu_n}{1-\mu_n}\pi_n$$

$$(4.54)\qquad \varepsilon_{n+1} := \varphi_n\pi_n + \psi_n\varepsilon_n$$

rekursiv definierten Zahlen μ_n, ν_n, ε_n, π_n, ω_n, α_n, φ_n, ψ_n für $n \le N+1$ existieren und den Bedingungen genügen:

$$(4.55)\qquad \nu_n < 1 \qquad \forall\ n \le N$$

$$(4.56)\qquad \varepsilon_n + \sum_{\kappa=0}^{n-1}\pi_\kappa + \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 + \tfrac{1}{2}\omega_n(1+\tfrac{1}{2}\omega_n)^2)\cdot \frac{\pi_n + (1+\frac{1}{2}\nu_n)\varepsilon_n}{1-\nu_n} \le 2 \qquad \forall\ n \le N$$

$$(4.57)\qquad \nu_{N+1} \le \nu_N$$

$$(4.58)\qquad \varepsilon_{N+1} \le \varepsilon_N$$

$$(4.59)\qquad \psi_N < 1$$

$$(4.60)\qquad \varepsilon_N + \sum_{\kappa=0}^{N}\pi_\kappa + \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 + \tfrac{1}{2}\omega_N(1+\tfrac{1}{2}\omega_N)^2)\cdot \frac{\pi_N + (1+\frac{1}{2}\nu_N)\varepsilon_N}{1-\nu_N} + \frac{\frac{1}{2}\mu_N}{1-\frac{3}{2}\mu_N} \le 2$$

Dann gilt:

(4.61) Die durch $y_0 := x_0$ und

$$t(y_n) := -[F'(y_n)]^{-1}F(y_n) - \tfrac{1}{2}[F'(y_n)]^{-1}F''(y_n)[[F'(y_n)]^{-1}F(y_n)]^{(2)}$$

$$r(y_n) := -[F'(y_n)]^{-1}F(y_n) - \tfrac{1}{2}[F'(y_n)]^{-1}F''(y_n + \tfrac{1}{3}t(y_n))\,t^{(2)}(y_n)$$

$$y_{n+1} := y_n - [F'(y_n)]^{-1} F(y_n) - \tfrac{1}{2}[F'(y_n)]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \{F''(y_n + \tfrac{1}{3}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})\, r(y_n)) + F''(y_n + \tfrac{1}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\, r(y_n))\} \cdot$$

$$\cdot r(y_n)^{(2)}$$

rekursiv definierte Folge $\{y_n\}$ existiert, es gilt $y_n \in S_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x^*$.

(4.62) Es gilt $F(x^*) = \theta$.

(4.63) Die Gleichung $F(x) = \theta$ besitzt in S_1 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Zusätzlich zu den durch (4.46) - (4.54) definierten Folgen werden noch die durch

(4.64) β_0, $\mathcal{S}_0$ sowie $\hat{\delta}_0 := 0$ und

(4.65) $$\beta_{n+1} := \frac{\beta_n}{1 - \mu_n}$$

(4.66) $$\mathcal{S}_{n+1} := \tfrac{1}{2} \frac{\mu_n}{1 - \mu_n}$$

(4.67) $$\hat{\delta}_{n+1} := \varphi_n \mathcal{S}_n + \psi_n \hat{\delta}_n$$

rekursiv definierten Folgen $\{\beta_n\}, \{\mathcal{S}_n\}, \{\hat{\delta}_n\}$ eingeführt.

Es wird zunächst gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die durch (4.46) - (4.54) und (4.64) - (4.67) definierten Zahlen μ_n, ν_n, π_n, ε_n, ω_n, λ_n, φ_n, ψ_n, β_n, $\mathcal{S}_n$, $\hat{\delta}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, sowie:

(4.68) $\mu_n \geq 0$, $\mu_{n+1} \leq \mu_n$, $\mu_n = \beta_n K_2 \mathcal{S}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.69) $\nu_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\nu_{n+1} \leq \nu_n \quad \forall\, n \geq N$

(4.70) $\pi_n \geq 0$, $\pi_{n+1} \leq \tfrac{1}{2} \pi_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.71) $\varepsilon_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n \quad \forall\, n \geq N$

(4.72) $\omega_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\omega_{n+1} \leq \omega_n \quad \forall\, n \geq N$

(4.73) $\lambda_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n \quad \forall\, n \geq N$

(4.74) $\beta_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.75) $\mathcal{S}_n \geq 0$, $\mathcal{S}_{n+1} \leq \tfrac{1}{2} \mathcal{S}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.76) $\hat{\delta}_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.77) $\varphi_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

(4.78) $\psi_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Denn: Da die Voraussetzungen des Satzes über das Newton-Verfahren erfüllt sind, erhält man aus Teil (A) des Beweises von Satz I.2 die Existenz von $\{\mu_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\mathcal{S}_n\}$, sowie die Aussagen (4.68), (4.74), (4.75). Aus (4.53) und (4.68) folgt (4.70). Die Aussagen (4.69), (4.71), (4.72), (4.73), (4.77) und (4.78) erhält man aus (4.51), (4.52) sowie (4.55), wenn man berücksichtigt unter Beachtung von (4.57) und (4.58), daß die durch (4.47) - (4.50) definierten Ausdrücke

$$\varphi_n(\mu_n, \nu_n)$$

$$\alpha_n = \alpha_n(\omega_n) = \alpha_n(\mu_n, \nu_n)$$
$$\varphi_n = \varphi_n(\alpha_n, \nu_n) = \varphi_n(\mu_n, \nu_n)$$
$$\psi_n = \psi_n(\alpha_n, \nu_n) = \psi_n(\mu_n, \nu_n)$$

für $0 \le \nu_n < 1$ sowie $\mu_n \ge 0$ positiv oder Null sind und unter diesen Bedingungen in μ_n, ν_n monoton fallen, d.h.:

Aus $0 \le \nu_n < 1$, $0 \le \nu_{n+1} < 1$, $\mu_n \ge 0$, $\mu_{n+1} \ge 0$

und $\mu_{n+1} \le \mu_n$, $\nu_{n+1} \le \nu_n$

folgt $\omega_{n+1} \le \omega_n$ und somit $\alpha_{n+1} \le \alpha_n$ und hieraus wiederum

$\varphi_{n+1} \le \varphi_n$ und $\psi_{n+1} \le \psi_n$

(4.78) ergibt sich dann aber unmittelbar aus (4.67). Aus (4.68) und (4.69) sowie (4.59) erhält man schließlich noch

(4.79) $\psi_n \le \psi_N < 1 \qquad \forall\ n \ge N$

(4.80) $\varphi_n \le \varphi_N \qquad \forall\ n \ge N$

Für den weiteren Beweis werden nun folgende Bezeichnungen verwendet:

$$N(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x)$$
$$t(x) := -[F'(x)]^{-1} F(x) - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x)[[F'(x)]^{-1} F(x)]^{(2)}$$
$$r(x) := -[F'(x)]^{-1} F(x) - \tfrac{1}{2}[F'(x)]^{-1} F''(x + \tfrac{1}{3} t(x))\, t(x)^{(2)}$$
$$R(x) := x - [F'(x)]^{-1} F(x) - \tfrac{1}{4}[F'(x)]^{-1} \cdot$$
$$\cdot\{F''(x + \tfrac{1}{3}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})\, r(x)) + F''(x + \tfrac{1}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\, r(x))\}\, r(x)^{(2)}$$

$$\beta(x) := \|[F'(x)]^{-1}\|$$
$$\gamma(x) := \|[F'(x)]^{-1} F(x)\|$$
$$\delta(x) := \|[F'(x)]^{-1}\|\ \|F(x)\|$$
$$\mu(x) := \beta(x) K_2\, \gamma(x)$$

Der Satz über das Newton-Verfahren (Satz I.2) liefert nun die Aussagen

(4.81) Die durch x_0 und $x_{n+1} := N(x_n)$ rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert und es gilt $x_n \in S_0$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Außerdem existiert ein $x^* \in S_0$ mit $x_n \to x^*$ und $F(x^*) = \theta$, wobei x^* die einzige Lösung der Gleichung $F(x) = \theta$ in S_0 ist.

Weiter entnimmt man Teil (B) des Beweises von Satz I.2 die Abschätzungen:

(4.82)
$$\begin{cases} \beta(x_n) \le \beta_n & \forall\ n \in \mathbb{N} \\ \delta(x_n) \le \delta_n & \forall\ n \ge 1 \\ \beta_n K_2 \delta_n = \mu_n & \forall\ n \in \mathbb{N} \\ \|x_{n+1} - x_n\| \le \delta_n & \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die durch das hier betrachtete Verfahren erzeugte Iterationsfolge (deren Existenz noch gezeigt werden muß!) werde mit $\{y_n\}$ bezeichnet.

D.h. $y_0 := x_0$ und $y_{n+1} := R(y_n)$

Weiter sei $\Delta x_n := y_n - x_n$; d.h. $\Delta x_0 = \theta$, da $y_0 := x_0$.

Es wird nun gezeigt: Die Folge $\{y_n\}$ existiert und es gilt $y_n \in S_0$ für

alle $n \in \mathbb{N}$. Hierfür genügt es durch vollständige Induktion nach n zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$(\text{Ind } 1)_n$ $\quad \| \Delta x_n \| \le \hat{\delta}_n$

$(\text{Ind } 2)_n$ $\quad \hat{\delta}_n \le \varepsilon_n \, \delta_0 \quad ; \quad \delta_n \le \pi_n \, \delta_0$

$(\text{Ind } 3)_n$ $\quad y_n \in S_0$

$(\text{Ind } 4)_n$ $\quad \beta_n K_2 \hat{\delta}_n = \nu_n < 1$

$(\text{Ind } 5)_n$ $\quad [F'(y_n)]^{-1}$ existiert, ist linear und beschränkt mit

$$\| [F'(y_n)]^{-1} \| \le \frac{\beta_n}{1 - \beta_n K_2 \hat{\delta}_n} = \frac{\beta_n}{1 - \nu_n}$$

$(\text{Ind } 6)_n$ $\quad y_n + \frac{1}{3} t(y_n) \in S_0$

$$y_n + \frac{1}{3} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r(y_n) \in S_0$$

Die Induktionsverankerung ergibt sich unmittelbar aus den Voraussetzungen und Definitionen, da

$$\| t(y_0) \| \le \delta_0 + \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 \delta_0^2 = (1 + \tfrac{1}{2} \mu_0) \delta_0 \le \tfrac{5}{4} \delta_0$$

und

$$\begin{aligned} \| r(y_0) \| &\le \delta_0 + \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 \| t(y_0) \|^2 \le \delta_0 + \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 (\delta_0 + \tfrac{1}{2} \beta_0 K_2 \delta_0^2)^2 \\ &= (1 + \tfrac{1}{2} \mu_0 (1 + \tfrac{1}{2} \mu_0)^2) \delta_0 \le (1 + \tfrac{1}{4} (\tfrac{5}{4})^2) \delta_0 \end{aligned}$$

Schluß von n auf n+1: Wegen $(\text{Ind } 3)_n$, $(\text{Ind } 5)_n$ existiert $y_{n+1} := R(y_n)$. Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_n$, $(\text{Ind } 4)_n$ sowie (4.82) und unter Heranziehung von Satz II.4 erhält man:

$$\begin{aligned} \| \Delta x_{n+1} \| &= \| y_{n+1} - x_{n+1} \| \\ &= \| R(y_n) - N(x_n) \| \\ &\le \| R(x_n + \Delta x_n) - N(x_n + \Delta x_n) \| + \| N(x_n + \Delta x_n) - N(x_n) \| \\ &\le \tfrac{1}{2} \beta (x_n + \Delta x_n) K_2 \| r(x_n + \Delta x_n) \|^2 + \frac{\beta_n K_2 \nu_n (\delta_n + \frac{1}{2} \hat{\delta}_n)}{1 - \beta_n K_2 \hat{\delta}_n} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} (4.83) \quad \| r(x_n + \Delta x_n) \| &\le \gamma^*(x_n + \Delta x_n) + \tfrac{1}{2} \beta (x_n + \Delta x_n) K_2 \| t(x_n + \Delta x_n) \|^2 \\ &\le \gamma^*(x_n + \Delta x_n) + \tfrac{1}{2} \beta (x_n + \Delta x_n) K_2 \cdot \\ &\quad \cdot \{ \gamma^*(x_n + \Delta x_n) + \tfrac{1}{2} \beta (x_n + \Delta x_n) K_2 \gamma^{*2}(x_n + \Delta x_n) \}^2 \\ &= (1 + \tfrac{1}{2} \mu (x_n + \Delta x_n) (1 + \tfrac{1}{2} \mu (x_n + \Delta x_n))^2) \gamma^*(x_n + \Delta x_n) \end{aligned}$$

und

$$(4.84) \qquad \mu (x_n + \Delta x_n) \le \frac{\mu_n + (1 + \frac{1}{2} \nu_n) \nu_n}{(1 - \nu_n)^2} = \omega_n$$

gilt somit

$$\| \Delta x_{n+1} \| \le \tfrac{1}{2} \omega_n (1 + \tfrac{1}{2} \omega_n (1 + \tfrac{1}{2} \omega_n)^2)^2 \frac{\delta_n + (1 + \frac{1}{2} \nu_n) \hat{\delta}_n}{1 - \nu_n} + \frac{\nu_n (\delta_n + \frac{1}{2} \hat{\delta}_n)}{1 - \nu_n}$$

$$= \frac{\alpha_n + \nu_n}{1 - \nu_n} \delta_n + \frac{\frac{1}{2}\nu_n \alpha_n + \frac{1}{2}\nu_n}{1 - \nu_n} \hat{\delta}_n$$

$$= \varphi_n \delta_n + \psi_n \hat{\delta}_n$$

$$= \hat{\delta}_{n+1} \qquad \text{wegen (4.47) - (4.50) und (4.67)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 1)_{n+1}$. Aus $(\text{Ind } 2)_n$ folgt:

$$\hat{\delta}_{n+1} = \varphi_n \delta_n + \psi_n \hat{\delta}_n \le (\varphi_n \pi_n + \psi_n \varepsilon_n)\, \delta_0 = \varepsilon_{n+1} \delta_0 \qquad \text{nach (4.54)}$$

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\mu_n}{1 - \mu_n} \delta_n \le \frac{1}{2} \frac{\mu_n}{1 - \mu_n} \pi_n \delta_0 = \pi_{n+1} \delta_0 \qquad \text{nach (4.53)}$$

Hieraus folgt $(\text{Ind } 2)_{n+1}$. Unter Verwendung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$ und $(\text{Ind } 2)_{n+1}$ sowie (4.51), (4.68) und (4.82) erhält man:

$$(4.85) \quad \| y_{n+1} - x_0 \| \le \| y_{n+1} - x_{n+1} \| + \sum_{\kappa=0}^{n} \| x_{\kappa+1} - x_\kappa \|$$

$$\le \hat{\delta}_{n+1} + \sum_{\kappa=0}^{n} \delta_\kappa \le (\varepsilon_{n+1} + \sum_{\kappa=0}^{n} \pi_\kappa)\, \delta_0$$

Für $n+1 \le N$ folgt hieraus nach (4.56)

$$\| y_{n+1} - x_0 \| \le 2 \delta_0 \qquad \Rightarrow \qquad y_{n+1} \in S_0$$

Ist $n+1 > N$, so hat man:

$$(4.86) \quad \| y_{n+1} - x_0 \| \le (\varepsilon_{n+1} + \sum_{\kappa=0}^{n} \pi_\kappa)\, \delta_0$$

$$\le (\varepsilon_N + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \pi_\kappa)\, \delta_0 \qquad \text{wegen (4.70), (4.71)}$$

$$\le (\varepsilon_N + \sum_{\kappa=0}^{N} \pi_\kappa + \sum_{\kappa=N+1}^{\infty} \pi_\kappa)\, \delta_0$$

$$\le (\varepsilon_N + \sum_{\kappa=0}^{N} \pi_\kappa + \frac{\frac{1}{2}\mu_N}{1 - \mu_N} \pi_N \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}\mu_N}{1 - \mu_N} \right)^\kappa)\, \delta_0$$

wegen (4.53), (4.68)

$$\le (\varepsilon_N + \sum_{\kappa=0}^{N} \pi_\kappa + \frac{\frac{1}{2}\mu_N}{1 - \frac{1}{2}\mu_N} \pi_N)\, \delta_0$$

$$\le 2 \delta_0 \qquad \text{wegen (4.60)}$$

Also gilt auch in diesem Falle $y_{n+1} \in S_0$. Daraus folgt $(\text{Ind } 3)_{n+1}$. Mit (4.65), (4.67) und $(\text{Ind } 4)_n$ folgt:

$$\beta_{n+1} K_2 \hat{\delta}_{n+1} = \frac{\beta_n K_2}{1 - \mu_n} (\varphi_n \delta_n + \psi_n \hat{\delta}_n) = \frac{1}{1 - \mu_n} (\varphi_n \mu_n + \psi_n \nu_n) = \nu_{n+1}$$

nach (4.52). Hieraus folgt $(\text{Ind } 4)_{n+1}$. Unter Beachtung von $(\text{Ind } 1)_{n+1}$, $(\text{Ind } 4)_{n+1}$ und

$$[F'(y_{n+1})]^{-1} = [F'(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})]^{-1}$$

erhält man unter Heranziehung von Satz II.4 $(\text{Ind } 5)_{n+1}$. Aus $(\text{Ind } 5)_{n+1}$ folgt die Existenz von $t(y_{n+1})$ sowie $r(y_{n+1})$. Es ist

$$\| t(y_{n+1}) \| \le \gamma(y_{n+1}) + \frac{1}{2} \beta(y_{n+1}) K_2 \gamma^2(y_{n+1})$$

$$\| r(y_{n+1}) \| \leq \gamma(y_{n+1}) + \tfrac{1}{2}\, \beta(y_{n+1})\, K_2 \{ \gamma(y_{n+1}) + \tfrac{1}{2}\, \beta(y_{n+1})\, K_2\, \gamma^2(y_{n+1}) \}^2$$

d.h.

$$\| t(y_{n+1}) \| \leq \| r(y_{n+1}) \| \tag{4.87}$$

Nach (4.83), (4.84) gilt

$$\| r(y_{n+1}) \| = \| r(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \| \tag{4.88}$$

$$\leq (1 + \tfrac{1}{2}\, \omega_n (1 + \tfrac{1}{2}\, \omega_n)^2) \frac{\varepsilon_n + (1 + \frac{1}{2}\, \nu_n)\, \delta_n}{1 - \nu_n}$$

Somit nach (4.85), (4.88):

$$\| y_{n+1} + \tfrac{1}{3} (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2^1}})\, r(y_{n+1}) - x_0 \| \leq$$

$$\leq \| y_{n+1} - x_0 \| + \tfrac{1}{3} (1 + \frac{1}{\sqrt{2^1}}) \| r(y_{n+1}) \|$$

$$\leq (\varepsilon_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \pi_k)\, \varepsilon_0 + \tfrac{1}{3} (1 + \frac{1}{\sqrt{2^1}}) (1 + \tfrac{1}{2}\, \omega_n (1 + \tfrac{1}{2}\, \omega_n)^2) \cdot$$

$$\cdot \frac{\pi_n + (1 + \frac{1}{2}\, \nu_n)\, \varepsilon_n}{1 - \nu_n}\, \varepsilon_0$$

Für n+1 ≤ N folgt hieraus nach (4.56):

$$\| y_{n+1} + \tfrac{1}{3} (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2^1}})\, r(y_{n+1}) - x_0 \| \leq 2\, \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \quad y_{n+1} + \tfrac{1}{3} (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2^1}})\, r(y_{n+1}) \in S_0$$

Ist n+1 > N, so hat man nach (4.86):

$$\| y_{n+1} + \tfrac{1}{3} (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2^1}})\, r(y_{n+1}) - x_0 \| \leq (\varepsilon_N + \sum_{k=0}^{N} \pi_k + \frac{\frac{1}{2}\, \mu_N}{1 - \frac{3}{2}\, \mu_N} \pi_N)\, \varepsilon_0 +$$

$$+ \tfrac{1}{3} (1 + \frac{1}{\sqrt{2^1}}) (1 + \tfrac{1}{2}\, \omega_N (1 + \tfrac{1}{2}\, \omega_N)^2) \frac{\pi_N + (1 + \frac{1}{2}\, \nu_N)\, \varepsilon_N}{1 - \nu_N}\, \varepsilon_0$$

wegen (4.69) - (4.71)

$$\leq 2\, \varepsilon_0$$ wegen (4.60)

Also gilt auch in diesem Falle

$$y_{n+1} + \tfrac{1}{3} (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2^1}})\, r(y_{n+1}) \in S_0$$

Wegen (4.87) und $\tfrac{1}{3} < \tfrac{1}{3} (1 + \frac{1}{\sqrt{2^1}})$ folgt hieraus auch

$$y_{n+1} + \tfrac{1}{3}\, t(y_{n+1}) \in S_0$$

Damit ist $(\text{Ind } 6)_{n+1}$ bewiesen.
Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Nun ist für n ≥ N nach (4.79), (4,80):

$$\Psi_n \le \Psi_N < 1 \qquad \text{und} \qquad \Phi_n \le \Phi_N$$

d.h. $\hat{\delta}_{n+1} = \Phi_n \varepsilon_n + \Psi_n \hat{\delta}_n \le \Phi_N \varepsilon_n + \Psi_N \hat{\delta}_n$

Wegen $\Psi_N < 1$ erhält man aus Satz II.5

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_n = 0 \qquad \text{d.h.} \qquad \| y_n - x_n \| \to 0$$

d.h. da $x_n \to x^*$ nach (4.81) gilt, gilt auch $y_n \to x^*$. Zusammen mit (4.81) folgen hieraus die Behauptungen.
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Die Voraussetzungen von Satz IV.3 sollen nun durch eine einfache Zahl ausgedrückt werden.

Satz IV.4: Es sei X ein Banach-Raum, $M \subset X$ offen, $x_0 \in M$ und $F: M \to X$ eine Abbildung, die zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es existiere die beschränkte Inverse $[F'(x_0)]^{-1}$. Es gebe Zahlen β_0, K_2, $\varepsilon_0 \in R$, so daß gilt:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \le \beta_0 \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \le \varepsilon_0$$

$$S_0 := \{ x \in X : \| x - x_0 \| \le 2\varepsilon_0 \} \subset M$$

$$\sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \le K_2$$

$$\mu_0 := \beta_0 K_2 \varepsilon_0 \le 0.3728$$

Dann gilt:
(4.89) Die durch x_0 und

$$t(x_n) := -[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{2} [F'(x_n)]^{-1} F''(x_n) \cdot [[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)}$$

$$r(x_n) := -[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{2} [F'(x_n)]^{-1} F''(x_n + \tfrac{1}{3} t(x_n))\, t(x_n)^{(2)}$$

$$x_{n+1} := x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{4} [F'(x_n)]^{-1} \cdot \{ F''(x_n + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}) r(x_n)) + F''(x_n + -(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}) r(x_n)) \} \cdot r(x_n)^{(2)}$$

rekursiv definierte Folge $\{x_n\}$ existiert, es gilt $x_n \in S_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $x^* \in S_0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.
(4.90) Es gilt $F(x^*) = 0$.
(4.91) Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt in S_0 außer x^* keine weitere Lösung.

Beweis: Für $\mu_0 = 0.3782$ beweist man die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz IV.4 durch Ausrechnen. Kleinere Werte von μ_0 lassen sich durch geeignete Vergrößerung von K_2 stets auf 0.3782 vergrößern. ■

Es soll nun noch die Konvergenzordnung des Verfahrens untersucht werden. Im Beweis des folgenden Satzes ist dabei in gewisser Weise die Untersuchung der Konvergenzordnung des in Satz IV.1 betrachteten Verfahrens mit eingeschlossen.

Satz IV.5: Die Voraussetzungen von Satz IV.3 bzw. Satz IV.4 seien erfüllt. Überdies sei der Operator F auf S_0 fünfmal stetig Fréchet-differenzierbar mit $\sup_{x \in S_0} \| F^{(i)}(x) \| \le K_i$ für $i = 2(1)5$. Dann konvergiert das in Satz IV.3 angegebene Verfahren von fünfter Ordnung.

Beweis: Man kann das Verfahren schreiben in der Form

$$F(x_n) + F'(x_n)\, c_n = 0$$

$$F(x_n) + F'(x_n)\, t_n + \tfrac{1}{2} F''(x_n)\, c_n^{(2)} = 0$$

$$F(x_n) + F'(x_n)\, r_n + \tfrac{1}{2} F''(x_n + \tfrac{1}{3} t_n)\, t_n^{(2)} = 0$$

$$F(x_n) + F'(x_n)\, u_n + \tfrac{1}{4} \left(F''(x_n + \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r_n) + F''(x_n + \tfrac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r_n)\right) r_n^{(2)} = 0$$

$$x_{n+1} := x_n + u_n$$

Man hat:

$$\|x^* - x_{n+1}\| = \|x^* - x_n - u_n\|$$

$$\leq \|F_n'^{-1}\| \, \|F_n' u_n^* - F_n' u_n\| \qquad \text{mit } u_n^* := x^* - x_n$$

$$\leq \|F_n'^{-1}\| \, \Big\| - F(x^*) + F(x_n) + F'(x_n) u_n^* + \tfrac{1}{4}\left\{F''(x_n + \tfrac{1}{3}\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) r_n) + F''(x_n + \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) r_n)\right\} r_n^{(2)} \Big\|$$

oder wegen

$$F''(x_n + \tfrac{1}{3}\left(1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) r_n) =$$

$$= F''(x_n) + \tfrac{1}{3}\left(1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) F'''(x_n) r_n + \tfrac{1}{18}\left(1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 F^{IV}(x_n) r_n^{(2)} + \tfrac{1}{27}\left(1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^2}{2} F^{V}(x_n + \tfrac{1}{3}\left(1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda\, r_n)\, r_n^{(3)}\, d\lambda$$

d.h.

$$\tfrac{1}{4}\left\{F''(x_n + \tfrac{1}{3}\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) r_n) + F''(x_n + \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) r_n)\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2} F''(x_n) + \tfrac{1}{6} F'''(x_n)\, r_n + \tfrac{1}{24} F^{IV}(x_n) r_n^{(2)} + \left\{\cdots\int\cdots + \cdots\int\cdots\right\}$$

Also:

$$\leq \|F_n'^{-1}\| \, \Big\| - F(x^*) + F(x_n) + F'(x_n) u_n^* + \tfrac{1}{2} F''(x_n) r_n^{(2)} + \tfrac{1}{6} F'''(x_n) r_n^{(3)} + \tfrac{1}{24} F^{IV}(x_n) r_n^{(4)} \Big\| + \|F_n'^{-1}\| \, \tfrac{1}{27}\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 K_5 \, \|r_n\|^5$$

$$\leq \|F_n'^{-1}\| \left\{ \Big\| - F(x^*) + F(x_n) + F'(x_n) u_n^* + \tfrac{1}{2} F''(x_n) u_n^{*(2)} + \tfrac{1}{6} F'''(x_n) u_n^{*(3)} + \tfrac{1}{24} F^{IV}(x_n) u_n^{*(4)} \Big\| + \tfrac{1}{2} K_2 \, \|u_n^* + r_n\| \, \|u_n^* - r_n\| + \tfrac{1}{6} K_3 \, \|u_n^* + r_n\|^2 \cdot \|u_n^* - r_n\| + \tfrac{1}{6} K_3 \, \|r_n\| \, \|u_n^*\| \, \|u_n^* - r_n\| + \tfrac{1}{24} K_4 \, \|u_n^* + r_n\| \cdot \|u_n^* - r_n\| \, \|r_n\|^2 + \tfrac{1}{24} K_4 \, \|u_n^* + r_n\| \, \|u_n^* - r_n\| \, \|u_n^*\|^2 + \tfrac{1}{27}\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 K_5 \, \|r_n\|^5 \right\}$$

$$= \|F_n'^{-1}\| \left\{ \tfrac{1}{120} K_5 \, \|u_n^*\|^5 + \tfrac{1}{2} K_2 \, \|u_n^* + r_n\| \, \|u_n^* - r_n\| + \tfrac{1}{6} K_3 \cdot \|u_n^* + r_n\|^2 \, \|u_n^* - r_n\| + \tfrac{1}{6} K_3 \, \|r_n\| \, \|u_n^*\| \, \|u_n^* - r_n\| + \tfrac{1}{24} K_4 \cdot \|u_n^* + r_n\| \, \|u_n^* - r_n\| \, \|r_n\|^2 + \tfrac{1}{24} K_4 \, \|u_n^* + r_n\| \, \|u_n^* - r_n\| \, \|u_n^*\|^2 + \tfrac{1}{27}\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 K_5 \, \|r_n\|^5 \right\}$$

Nun gilt:

$$\|u_n^* - r_n\| \leq \|F_n'^{-1}\| \, \|F(x_n) + F'(x_n) u_n^* + \tfrac{1}{2} F''(x_n + \tfrac{1}{3} t_n)\, t_n^{(2)}\|$$

$$\leq \|F_n'^{-1}\| \left\{ \|F(x_n) + F'(x_n) u_n^* + \tfrac{1}{2} F''(x_n)\, t_n^{(2)} + \tfrac{1}{6} F'''(x_n)\, t_n^{(3)}\| + \tfrac{1}{18} K_4 \, \|t_n\|^4 \right\}$$

$$\leq \|F_n'^{-1}\| \left\{ \tfrac{1}{24} K_4 \, \|u_n^*\|^4 + \tfrac{1}{2} K_2 \, \|t_n - u_n^*\| \, \|t_n + u_n^*\| + \tfrac{1}{6} K_2 \, \|t_n + u_n^*\|^2 \, \|t_n - u_n^*\| + \tfrac{1}{6} K_3 \, \|t_n\| \, \|u_n^*\| \cdot \|t_n - u_n^*\| \cdot \tfrac{1}{8} K_4 \, \|t_n\|^4 \right\}$$

$$\| t_n - u_n^* \| \le \| F_n'^{-1} \| \left\{ \tfrac{1}{6} K_3 \| u_n^* \|^3 + \tfrac{1}{2} K_2 \| c_n - u_n^* \| \| c_n + u_n^* \| \right\}$$
$$\| c_n - u_n^* \| \le \| F_n'^{-1} \| \tfrac{1}{2} K_2 \| u_n^* \|^2$$

Also:

$$\| c_n - u_n^* \| = \sigma(\| u_n^* \|^2) \quad ; \quad \| c_n + u_n^* \| = \sigma(\| u_n^* \|) \quad ; \quad \| c_n \| = \sigma(\| u_n^* \|)$$
$$\| t_n - u_n^* \| = \sigma(\| u_n^* \|^3) \quad ; \quad \| t_n + u_n^* \| = \sigma(\| u_n^* \|) \quad ; \quad \| t_n \| = \sigma(\| u_n^* \|)$$
$$\| r_n - u_n^* \| = \sigma(\| u_n^* \|^4) \quad ; \quad \| r_n + u_n^* \| = \sigma(\| u_n^* \|) \quad ; \quad \| r_n \| = \sigma(\| u_n^* \|)$$

Hieraus folgt:

$$\| x^* - x_{n+1} \| = \sigma(\| x^* - x_n \|^5)$$

D.h. das Verfahren konvergiert von der Ordnung 5. ■

Anmerkung: Ist der Operator F auf S_0 nur vier- (drei-, zwei-) mal stetig differenzierbar, so kann man völlig analog leicht zeigen, daß das Verfahren dann von vierter (dritter, zweiter) Ordnung konvergiert.

Ergänzungen: Bei Iterationsverfahren höherer Ordnung kann man - neben einer Vielzahl anderer Unterteilungsmöglichkeiten - zwei Klassen unterscheiden: Einpunkt-Verfahren und Mehrpunkt-Verfahren. Während bei den Einpunkt-Verfahren für jeden Schritt der betrachtete Operator und gewisse seiner Ableitungen in einem Punkt berechnet werden müssen, ist es bei den Mehrpunkt-Verfahren erforderlich, den Operator und eventuell gewisse seiner Ableitungen in mehreren Punkten zu berechnen. Typische Vertreter für Einpunkt-Verfahren wären z.B. das Halley- und das Tschebyscheff-Verfahren als Verfahren 3. Ordnung. Eine ausführliche Betrachtung derartiger Verfahren höherer Ordnung findet man etwa in [1]. Ein typischer Vertreter für Mehrpunkt-Verfahren wäre etwa das in Kapitel I, Satz I.7 bereits kurz betrachtete gemischte Newton-Verfahren als ein Verfahren 3. Ordnung. Eine eingehendere Darstellung derartiger Verfahren findet man speziell in [2] sowie [3],[4]. Die zwischen Einpunkt- und Mehrpunkt-Verfahren bestehenden engen Beziehungen wurden in dieser Arbeit mehrfach ausgenutzt. Dabei wurde berücksichtigt, daß man praktisch jedem Mehrpunkt-Verfahren durch Taylorentwicklung seiner Iterationsvorschrift ein verwandtes Einpunkt-Verfahren zuordnen kann. Für das gemischte Newton-Verfahren gilt etwa

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n)) \\ &\approx x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - [F'(x_n)]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \{ F(x_n) - F'(x_n)[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) + \tfrac{1}{2} F''(x_n)[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)} \} \\ &= x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) - \tfrac{1}{2} [F'(x_n)]^{-1} F''(x_n)[[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)]^{(2)} \end{aligned}$$

Das zugehörige Einpunkt-Verfahren wäre hier also das Tschebyscheff-Verfahren. Solche Verwandtschaftsbeziehungen lassen sich stets in zwei Richtungen ausnutzen: Indem man Einpunkt-Verfahren als "gestörte" Mehrpunkt-Verfahren behandelt, kann man für erstere recht gute Konvergenzbedingungen ableiten (siehe die entsprechenden Sätze über das Halley- und Tschebyscheff-Verfahren); indem man bei Mehrpunkt-Verfahren die Taylorentwicklung ihrer Iterationsfolge durchführt, kann man ihre Konvergenzordnung in völliger Analogie zu den entsprechenden Einpunkt-Verfahren beweisen.

Literatur:

[1] Döring, B. Ein Satz über eine von Grebenjuk betrachtete Klasse von Iterationsverfahren. In: Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie (ISNM Vol. 15) Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1970 S. 195 - 226

[2] Falb, P.L. and Jr. Bosarge, W.E. A multipoint method of third order. J. Optimization Theory Appl. 4 , 156 - 166 (1969), MR 40 , 1333

[3] Falb, P.L. and Jr. Bosarge, W.E. Infinite dimensional multipoint methods and the solution of two point boundary value problems Numer. Math. 14 , 264 - 286 (1969/70) MR 41, 1251

[4] Mörbel, F. Iterationsverfahren höherer Ordnung in Banach-Räumen mit Anwendung auf Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dissertation, Düsseldorf, 1973

Kapitel V

Ein Beispiel im $\mathbb{R}^3$

Aus der Aufgabenstellung, zu einer Reihe von Meßpunkten

$$y_i := y(t_i) \quad , \quad i = 1,\dots,20$$

die nach kleinsten Fehlerquadraten beste ausgleichende Funktion der Gestalt

$$(5.1) \qquad f(t) = f(t;a,k_1,k_2) := \frac{a\,k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

zu bestimmen, ergibt sich die Optimierungsaufgabe

$$(5.2) \qquad \varphi(a,k_1,k_2) := \sum_{i=1}^{20}\left\{\frac{a\,k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i}\right) - y_i\right\}^2 \overset{!}{=} \min$$

Indem man das Problem durch

$$A := \frac{a\,k_1}{k_2 - k_1}$$

umformt in das einfachere Problem

$$(5.3) \qquad \Psi(A,k_1,k_2) := \sum_{i=1}^{20}\left\{A\left(e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i}\right) - y_i\right\}^2 \overset{!}{=} \min$$

erhält man als notwendige Bedingung

$$(5.4) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial A} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial k_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial k_2} = 0$$

Indem man die Gleichungen (5.4) mit $\frac{1}{2}$ multipliziert und

$$(5.5) \qquad x_1 := A \quad ; \quad x_2 := k_1 \quad ; \quad x_3 := k_2$$

setzt, erhält man die Aufgabe:
Gesucht ist die Nullstelle der Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

mit

$$(5.6) \qquad F\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{20}\left\{x_1\left(e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}\right)^2 - y_i\left(e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}\right)\right\} \\ -\sum_{i=1}^{20}\left\{x_1\left(e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}\right) - y_i\right\} x_1 t_i e^{-x_2 t_i} \\ \sum_{i=1}^{20}\left\{x_1\left(e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}\right) - y_i\right\} x_1 t_i e^{-x_3 t_i} \end{bmatrix}$$

Um diese Aufgabe mit Hilfe der in dieser Arbeit betrachteten numerischen Verfahren zu behandeln, müssen zunächst die Ableitungen von F berechnet und abgeschätzt werden. Man erhält:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \sum_i (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i})^2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \sum_i t_i e^{-x_2 t_i} \left\{ y_i - 2 x_1 (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}) \right\}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \sum_i t_i e^{-x_3 t_i} \left\{ 2 x_1 (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}) - y_i \right\}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \sum_i \left\langle x_1 t_i^2 e^{-x_2 t_i} \left\{ x_1 (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}) - y_i \right\} + (x_1 t_i e^{-x_2 t_i})^2 \right\rangle$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \sum_i - x_1^2 t_i^2 e^{-x_2 t_i} e^{-x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \sum_i \left\langle - x_1 t_i^2 e^{-x_3 t_i} \left\{ x_1 (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}) - y_i \right\} + (x_1 t_i e^{-x_3 t_i})^2 \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_i - 2 t_i e^{-x_2 t_i} (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i})$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_3} = \sum_i 2 t_i e^{-x_3 t_i} (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i})$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_2} = \sum_i \left\langle 2 x_1 t_i^2 e^{-2 x_2 t_i} - t_i^2 e^{-x_2 t_i} \left\{ y_i - 2 x_1 (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}) \right\} \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \sum_i - 2\, x_1 t_i^2 e^{- x_2 t_i} - e^{- x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_3} = \sum_i \left\langle 2\, x_1 t_i^2 e^{- 2\, x_3 t_i} - t_i^2 e^{- x_3 t_i} \left\{ 2\, x_1 (e^{- x_2 t_i} - e^{- x_3 t_i}) - y_i \right\} \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_2} = \sum_i \left\langle - x_1 t_i^3 e^{- x_2 t_i} \left\{ x_1 (e^{- x_2 t_i} - e^{- x_3 t_i}) - y_i \right\} - 3\, x_1^2 t_i^3 e^{- 2\, x_2 t_i} \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_3} = \sum_i x_1^2 t_i^3 e^{- x_2 t_i} e^{- x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_3} = \sum_i x_1^2 t_i^3 e^{- x_2 t_i} e^{- x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3\,\partial x_3} = \sum_i \left\langle x_1 t_i^3 e^{-x_3 t_i} \left\{ x_1 (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}) - y_i \right\} - \right.$$

$$\left. - 3\, x_1^2 t_i^3 e^{-2 x_3 t_i} \right\rangle$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_3} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_2} = \sum_i 2\, t_i^2 e^{-x_2 t_i} (2\, e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i})$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} = \sum_i - 2\, t_i^2 e^{-x_2 t_i} e^{-x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_3} = \sum_i 2\, t_i^2 e^{-x_3 t_i} (2\, e^{-x_3 t_i} - e^{-x_2 t_i})$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_2} = \sum_i - t_i^3 e^{-x_2 t_i} \left\langle 6\, x_1 e^{-x_2 t_i} + 2\, x_1 (e^{-x_2 t_i} - \right.$$

$$\left. - e^{-x_3 t_i}) - y_i \right\rangle$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3} = \sum_i 2\, x_1 t_i^3 e^{-x_2 t_i} e^{-x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3} = \sum_i 2\, x_1 t_i^3 e^{-x_2 t_i} e^{-x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_2\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_2\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_3} = \sum_i - t_i^3 e^{-x_3 t_i} \Big\langle 6\,x_1 e^{-x_3 t_i} - \Big\{ 2\,x_1 (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}) - y_i \Big\} \Big\rangle$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_2} = \sum_i x_1 t_i^4 e^{-x_2 t_i} \Big\langle 7\,x_1 e^{-x_2 t_i} + x_1 (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}) - y_i \Big\rangle$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3} = \sum_i - x_1^2 t_i^4 e^{- x_2 t_i} e^{- x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3} = \sum_i - x_1^2 t_i^4 e^{- x_2 t_i} e^{- x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_2\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_2\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_3} = \sum_i - x_1^2 t_i^4 e^{- x_2 t_i} e^{- x_3 t_i}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_2\,\partial x_2\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\,\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\,\partial x_2\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\,\partial x_2\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_1} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\,\partial x_3\,\partial x_3} = \sum_i x_1 t_i^4 e^{-x_3 t_i} \left\langle 7\, x_1 e^{-x_3 t_i} - \left\{ x_1 (e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i}) - y_i \right\} \right\rangle$$

Neben der Kenntnis von F, F' und F'' zur Berechnung der Iterationsfolge sind zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen noch die Abschätzungen von

$$(5.7) \qquad \sup_{x \in S_0} \| F''(x) \| \quad ; \quad \sup_{x \in S_0} \| F'''(x) \|$$

notwendig.

Mit $x := (x_1, x_2, x_3)$ kann man bei Verwendung der Maximumsnorm

$$\| x \| := \max \{ |x_1| , |x_2| , |x_3| \}$$

die Forderung

$$x \in S_0 := \{ x : \| x - x_0 \| \leq r \}$$

in der Form schreiben

$$x_m \leq x \leq x_M \quad :\Leftrightarrow \quad x_{im} \leq x_i \leq x_{iM} \ , \ i = 1(1)3$$

wobei

$$x_m := (x_{10} - r \ , \ x_{20} - r \ , \ x_{30} - r)$$

$$x_M := (x_{10} + r \ , \ x_{20} + r \ , \ x_{30} + r)$$

Beachtet man noch, daß für $0 \in [x_{1m} , x_{1M}]$ gilt

$$\sup \| F^{(k)}(x) \| = \sup_{\begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ x_{3m} \end{pmatrix} \leq x \leq \begin{pmatrix} x_{1M} \\ x_{2M} \\ x_{3M} \end{pmatrix}}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \sup \left\| F^{(k)}(x) \right\| \\ \left(\begin{array}{c} x_{1m} \\ x_{2m} \\ x_{3m} \end{array} \right) \leq x \leq \left(\begin{array}{c} 0 \\ x_{2M} \\ x_{3M} \end{array} \right) \end{array} \; ; \; \begin{array}{l} \sup \left\| F^{(k)}(x) \right\| \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ x_{2m} \\ x_{3m} \end{array} \right) \leq x \leq \left(\begin{array}{c} x_{1M} \\ x_{2M} \\ x_{3M} \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad ; \; k = 2,3$$

so erhält man mit Hilfe der folgenden etwas aufwendigen Abschätzungen recht gute Schranken für (5.7).

Sei

$$F_{ijk} := \sup_{x_m \leq x \leq x_M} \left| \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \, \partial x_k}(x) \right|$$

$$F_{ijkl} := \sup_{x_m \leq x \leq x_M} \left| \frac{\partial^3 F_i}{\partial x_j \, \partial x_k \, \partial x_l}(x) \right| \quad ; \; i,j,k,l = 1,2,3$$

so erhält man die Abschätzungen:

Sei $x_{1m} \geq 0$, dann gilt:

$$F_{111} = 0$$

$$F_{112} \leq \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_i 2 \, t_i \, \varphi_i \left(e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i} \right) \right| \\ \left| \sum_i 2 \, t_i \, \psi_i \left(e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i} \right) \right| \end{array} \right.$$

mit

$$\varphi_i := \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x_{2m} t_i} & \\ e^{-x_{2M} t_i} & \text{für } e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i} \begin{array}{l} \geq 0 \\ < 0 \end{array} \end{array} \right.$$

$$\psi_i := \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x_{2m} t_i} & \\ e^{-x_{2M} t_i} & \text{für } e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i} \begin{array}{l} \leq 0 \\ > 0 \end{array} \end{array} \right.$$

$$F_{113} \leq \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_i 2 \, t_i \, \varphi_i \left(e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i} \right) \right| \\ \left| \sum_i 2 \, t_i \, \psi_i \left(e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i} \right) \right| \end{array} \right.$$

mit

$$\varphi_i := \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x_{3m} t_i} & \\ e^{-x_{3M} t_i} & \text{für } e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i} \begin{array}{l} \geq 0 \\ < 0 \end{array} \end{array} \right.$$

$$\psi_i := \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x_{3m} t_i} & \\ e^{-x_{3M} t_i} & \text{für } e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i} \begin{array}{l} \leq 0 \\ > 0 \end{array} \end{array} \right.$$

$$F_{123} \leq \left| \sum_i 2\, x_{1M}\, t_i^2 e^{-x_{1m} t_i} e^{-x_{3m} t_i} \right|$$

$$F_{223} \leq \left| \sum_i x_{1M}^2\, t_i^3 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3m} t_i} \right|$$

$$F_{233} = F_{223}$$

$$F_{122} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \langle 2\, x_{1M}\, t_i^2 e^{-2 x_{2m} t_i} + \varphi_i \{ 2\, \xi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \\ \left| \sum_i \langle 2\, x_{1m}\, t_i^2 e^{-2 x_{2M} t_i} + \psi_i \{ 2\, \chi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) \geq 0 \\ x_{1m} & < 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) \geq 0 \\ x_{1M} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} t_i^2 e^{-x_{2m} t_i} & \text{für } 2\, \xi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \geq 0 \\ t_i^2 e^{-x_{2M} t_i} & < 0 \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} t_i^2 e^{-x_{2M} t_i} & \text{für } 2\, \chi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \geq 0 \\ t_i^2 e^{-x_{2m} t_i} & < 0 \end{cases}$$

$$F_{222} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \langle 3\, x_{1M}^2\, t_i^3 e^{-2 x_{2m} t_i} + \varphi_i \{ \xi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \\ \left| \sum_i \langle 3\, x_{1m}^2\, t_i^3 e^{-2 x_{2M} t_i} + \psi_i \{ \chi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) \geq 0 \\ x_{1m} & < 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) \geq 0 \\ x_{1M} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{2m} t_i} & \text{für } \xi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y \geq 0 \\ x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{2M} t_i} & < 0 \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{2M} t_i} \\ x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{2m} t_i} \end{cases} \quad \text{für} \quad \chi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \begin{cases} \geq 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$F_{333} \leq \max \begin{cases} |\sum_i \langle 3\, x_{1M}^2\, t_i^3 e^{-2 x_{3m} t_i} - \varphi_i \{ \xi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \} \rangle| \\ |\sum_i \langle 3\, x_{1m}^2\, t_i^3 e^{-2 x_{3M} t_i} - \psi_i \{ \chi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \} \rangle| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1M} \\ x_{1m} \end{cases} \quad \text{für} \quad (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) \begin{cases} < 0 \\ \geq 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1M} \\ x_{1m} \end{cases} \quad \text{für} \quad (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) \begin{cases} \geq 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{3m} t_i} \\ x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{3M} t_i} \end{cases} \quad \text{für} \quad \xi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \begin{cases} < 0 \\ \geq 0 \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{3m} t_i} \\ x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{3M} t_i} \end{cases} \quad \text{für} \quad \chi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \begin{cases} \geq 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Die übrigen Abschätzungen ergeben sich aus den Gleichheiten zwischen gemischten Ableitungen.

Sei $x_{1M} \leq 0$, dann gilt:

$$F_{111} = 0$$

$$F_{112} \leq \max \begin{cases} |\sum_i 2\, t_i\, \varphi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i})| \\ |\sum_i 2\, t_i\, \psi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3m} t_i})| \end{cases}$$

mit

$$\varphi_i := \begin{cases} e^{-x_{2m} t_i} \\ e^{-x_{2M} t_i} \end{cases} \quad \text{für} \quad e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i} \begin{cases} \geq 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} e^{-x_{2m} t_i} \\ e^{-x_{2M} t_i} \end{cases} \quad \text{für} \quad e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i} \begin{cases} \leq 0 \\ > 0 \end{cases}$$

$$F_{113} \leq \max \begin{cases} |\sum_i 2\, t_i\, \varphi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i})| \\ |\sum_i 2\, t_i\, \psi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i})| \end{cases}$$

mit

$$\varphi_i := \begin{cases} e^{-x_{3m} t_i} & \text{für } e^{-x_{1m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i} \geq 0 \\ e^{-x_{3M} t_i} & \qquad\qquad < 0 \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} e^{-x_{3m} t_i} & \text{für } e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i} \leq 0 \\ e^{-x_{3M} t_i} & \qquad\qquad > 0 \end{cases}$$

$$F_{123} \leq \left| \sum_i 2\, x_{1m}\, t_i^2 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3m} t_i} \right|$$

$$F_{223} = \left| \sum_i x_{1m}^2\, t_i^3 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3m} t_i} \right|$$

$$F_{233} = F_{223}$$

$$F_{122} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \langle 2\, x_{1M}\, t_i^2 e^{-2 x_{2M} t_i} + \varphi_i \{ 2\, \xi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \\ \left| \sum_i \langle 2\, x_{1m}\, t_i^2 e^{-2 x_{2m} t_i} + \psi_i \{ 2\, \chi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) \geq 0 \\ x_{1m} & \qquad\qquad < 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) \geq 0 \\ x_{1M} & \qquad\qquad < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} t_i^2 e^{-x_{2m} t_i} & \text{für } 2\, \xi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \geq 0 \\ t_i^2 e^{-x_{2M} t_i} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad < 0 \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} t_i^2 e^{-x_{2M} t_i} & \text{für } 2\, \chi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \geq 0 \\ t_i^2 e^{-x_{2m} t_i} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad < 0 \end{cases}$$

$$F_{222} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \langle 3\, x_{1m}^2\, t_i^3 e^{-2 x_{2m} t_i} + \varphi_i \{ \xi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \\ \left| \sum_i \langle 3\, x_{1M}^2\, t_i^3 e^{-2 x_{2M} t_i} + \psi_i \{ \chi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) \geq 0 \\ x_{1M} & \qquad\qquad < 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) \geq 0 \\ x_{1m} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{2M}t_i} & \\ x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{2m}t_i} & \text{für } \xi_i(e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{2m}t_i} & \\ x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{2M}t_i} & \text{für } \chi_i(e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$F_{133} \leq \max \begin{cases} |\sum_i \langle 2\, x_{1M}\, t_i^2 e^{-2x_{3M}t_i} + \varphi_i \{ 2\, \xi_i (e^{-x_{2m}t_i} - \\ \qquad - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \} \rangle | \\ |\sum_i \langle 2\, x_{1m}\, t_i^2 e^{-2x_{3m}t_i} + \psi_i \{ 2\, \chi_i (e^{-x_{2M}t_i} - \\ \qquad - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \} \rangle | \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) \geq 0 \\ x_{1M} & < 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) \geq 0 \\ x_{1m} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} t_i^2 e^{-x_{3M}t_i} & \\ t_i^2 e^{-x_{3m}t_i} & \text{für } 2\, \xi_i (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} t_i^2 e^{-x_{3M}t_i} & \\ t_i^2 e^{-x_{3m}t_i} & \text{für } 2\, \chi_i (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$F_{333} \leq \max \begin{cases} |\sum_i \langle 3\, x_{1m}^2\, t_i^3 e^{-2x_{3m}t_i} - \varphi_i \{ \xi_i (e^{-x_{2M}t_i} - \\ \qquad - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \} \rangle | \\ |\sum_i \langle 3\, x_{1M}^2\, t_i^3 e^{-2x_{3M}t_i} - \psi_i \{ \chi_i (e^{-x_{2m}t_i} - \\ \qquad - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \} \rangle | \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) < 0 \\ x_{1M} & \geq 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) \geq 0 \\ x_{1M} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{3M} t_i} \\ x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{3m} t_i} \end{cases} \quad \text{für} \quad \xi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \begin{cases} < 0 \\ \geq 0 \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{3m} t_i} \\ x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{3M} t_i} \end{cases} \quad \text{für} \quad \chi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \begin{cases} < 0 \\ \geq 0 \end{cases}$$

Es sei $x_{1m} \geq 0$, dann gilt:

$$F_{1111} = 0$$

$$F_{1112} = 0$$

$$F_{1113} = 0$$

$$F_{1123} \leq \left| \sum_i 2\, t_i^2 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3m} t_i} \right|$$

$$F_{1223} \leq \left| \sum_i 2\, x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3m} t_i} \right|$$

$$F_{1233} = F_{1223}$$

$$F_{2223} \leq \left| \sum_i x_{1M}^2\, t_i^4 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3m} t_i} \right|$$

$$F_{2233} = F_{2223}$$

$$F_{2333} = F_{2223}$$

$$F_{1122} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i 2\, t_i^2\, \varphi_i (2\, e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) \right| \\ \left| \sum_i 2\, t_i^2\, \psi_i (2\, e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) \right| \end{cases}$$

mit

$$\varphi_i := \begin{cases} e^{-x_{2m} t_i} \\ e^{-x_{2M} t_i} \end{cases} \quad \text{für} \quad (2\, e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) \begin{cases} \geq 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} e^{-x_{2m} t_i} \\ e^{-x_{2M} t_i} \end{cases} \quad \text{für} \quad (2\, e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) \begin{cases} < 0 \\ \geq 0 \end{cases}$$

$$F_{1133} = \max \begin{cases} \left| \sum_i (4\, t_i^2 e^{-2 x_{2m} t_i} - 2\, t_i^2 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3M} t_i}) \right| \\ \left| \sum_i (4\, t_i^2 e^{-2 x_{3M} t_i} - 2\, t_i^2 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3m} t_i}) \right| \end{cases}$$

$$F_{1222} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \langle 6\, x_{1M}\, t_i^3 e^{-x_{2m} t_i} + \varphi_i \{ 2\, \xi_i (e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \\ \left| \sum_i \langle 6\, x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{2M} t_i} + \psi_i \{ 2\, \chi_i (e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}) - y_i \} \rangle \right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) \geq 0 \\ x_{1m} & < 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) \geq 0 \\ x_{1M} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} t_i^3 e^{-x_{2m}t_i} \\ t_i^3 e^{-x_{2M}t_i} \end{cases} \text{für } 2\,\xi_i(e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$$\psi_i := \begin{cases} t_i^3 e^{-x_{2M}t_i} \\ t_i^3 e^{-x_{2m}t_i} \end{cases} \text{für } 2\,\chi_i(e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$$F_{1333} \leq \max \begin{cases} |\sum_i \langle 6\, x_{1M}\, t_i^3 e^{-2x_{3m}t_i} - \varphi_i \{2\,\xi_i(e^{-x_{2M}t_i} - \\ \quad - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i\}\rangle| \\ |\sum_i \langle 6\, x_{1m}\, t_i^3 e^{-2x_{3M}t_i} - \psi_i \{2\,\chi_i(e^{-x_{2m}t_i} - \\ \quad - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i\}\rangle| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) < 0 \\ x_{1m} & \geq 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2m}t} - e^{-x_{3M}t_i}) \geq 0 \\ x_{1m} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} t_i^3 e^{-x_{3m}t_i} \\ t_i^3 e^{-x_{3M}t_i} \end{cases} \text{für } 2\,\xi_i(e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \begin{matrix} < 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

$$\psi_i := \begin{cases} t_i^3 e^{-x_{3m}t_i} \\ t_i^3 e^{-x_{3M}t_i} \end{cases} \text{für } 2\,\chi_i(e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$$F_{2222} \leq \max \begin{cases} |\sum_i \langle 7\, x_{1M}^2\, t_i^4 e^{-2x_{2m}t_i} + \varphi_i \{\xi_i(e^{-x_{2m}t_i} - \\ \quad - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i\}\rangle| \\ |\sum_i \langle 7\, x_{1m}^2\, t_i^4 e^{-2x_{2M}t_i} + \psi_i \{\chi_i(e^{-x_{2M}t_i} - \\ \quad - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i\}\rangle| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) \geq 0 \\ x_{1m} & < 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) \geq 0 \\ x_{1M} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^4 e^{-x_{2m}t_i} \\ x_{1m}\, t_i^4 e^{-x_{2M}t_i} & \text{für } \xi_i(e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} x_{1m}\, t_i^4 e^{-x_{2M}t_i} \\ x_{1M}\, t_i^4 e^{-x_{2m}t_i} & \text{für } \chi_i(e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$F_{3333} \leq \max \begin{cases} \left|\sum_i \langle 7\, x_{1M}^2\, t_i^4 e^{-2x_{3m}t_i} - \varphi_i \{ \xi_i(e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \} \rangle\right| \\ \left|\sum_i \langle 7\, x_{1m}^2\, t_i^4 e^{-2x_{3M}t_i} - \psi_i \{ \chi_i(e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \} \rangle\right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) < 0 \\ x_{1m} & \geq 0 \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) \geq 0 \\ x_{1m} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^4 e^{-x_{3m}t_i} \\ x_{1m}\, t_i^4 e^{-x_{3M}t_i} & \text{für } \xi_i(e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \begin{matrix} < 0 \\ \geq 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^4 e^{-x_{1m}t_i} \\ x_{1m}\, t_i^4 e^{-x_{3M}t_i} & \text{für } \chi_i(e^{-x_{1m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

Es sei $x_{1M} \leq 0$, dann gilt:

$F_{1111} = 0$

$F_{1112} = 0$

$F_{1113} = 0$

$F_{1123} \leq \left|\sum_i 2\, t_i^3 e^{-x_{2m}t_i} e^{-x_{3m}t_i}\right|$

$F_{1123} \leq \left|\sum_i 2\, t_i^3 e^{-x_{2m}t_i} e^{-x_{3m}t_i}\right|$

$F_{1223} \leq \left|\sum_i 2\, x_{1m}\, t_i^3 e^{-x_{2m}t_i} e^{-x_{3m}t_i}\right|$

$$F_{1233} = F_{1223}$$

$$F_{1223} \leq \left| \sum_i x_{1m}^2 \, t_i^4 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3m} t_i} \right|$$

$$F_{2233} = F_{2223}$$

$$F_{2333} = F_{2223}$$

$$F_{1122} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i 2 \, t_i^2 \, \varphi_i \left(2 e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}\right) \right| \\ \left| \sum_i 2 \, t_i^2 \, \psi_i \left(2 e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}\right) \right| \end{cases}$$

mit

$$\varphi_i := \begin{cases} e^{-x_{2m} t_i} \\ e^{-x_{2M} t_i} \end{cases} \text{ für } \left(2 e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}\right) \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$$\psi_i := \begin{cases} e^{-x_{2m} t_i} \\ e^{-x_{2M} t_i} \end{cases} \text{ für } \left(2 e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}\right) \begin{matrix} < 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

$$F_{1133} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \left(4 \, t_i^2 e^{-2 x_{3m} t_i} - 2 \, t_i^2 e^{-x_{2M} t_i} e^{-x_{3M} t_i}\right) \right| \\ \left| \sum_i \left(4 \, t_i^2 e^{-2 x_{3M} t_i} - 2 \, t_i^2 e^{-x_{2m} t_i} e^{-x_{3m} t_i}\right) \right| \end{cases}$$

$$F_{1222} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \langle 6 \, x_{1M} \, t_i^3 e^{-x_{2M} t_i} + \varphi_i \{2 \, \xi_i \left(e^{-x_{2M} t_i} - \right. \right. \\ \qquad \left. \left. - e^{-x_{3m} t_i}\right) - y_i \} \rangle \right| \\ \left| \sum_i \langle 6 \, x_{1m} \, t_i^3 e^{-x_{2m} t_i} + \psi_i \{2 \, \chi_i \left(e^{-x_{2m} t_i} - \right. \right. \\ \qquad \left. \left. - e^{-x_{3M} t_i}\right) - y_i \} \rangle \right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1m} \\ x_{1M} \end{cases} \text{ für } \left(e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}\right) \begin{matrix} \leq 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1m} \\ x_{1M} \end{cases} \text{ für } \left(e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}\right) \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} t_i^3 e^{-x_{2m} t_i} \\ t_i^3 e^{-x_{2M} t_i} \end{cases} \text{ für } 2 \, \xi_i \left(e^{-x_{2M} t_i} - e^{-x_{3m} t_i}\right) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$$\psi_i := \begin{cases} t_i^3 e^{-x_{2m} t_i} \\ t_i^3 e^{-x_{2M} t_i} \end{cases} \text{ für } 2 \, \chi_i \left(e^{-x_{2m} t_i} - e^{-x_{3M} t_i}\right) - y \begin{matrix} \leq 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

$$F_{1333} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \langle 6 \, x_{1M} \, t_i^3 e^{-2 x_{3M} t_i} - \varphi_i \{2 \, \xi_i \left(e^{-x_{2m} t_i} - \right. \right. \\ \qquad \left. \left. - e^{-x_{3M} t_i}\right) - y_i \} \rangle \right| \\ \left| \sum_i \langle 6 \, x_{1m} \, t_i^3 e^{-2 x_{3m} t_i} - \psi_i \{2 \, \chi_i \left(e^{-x_{2M} t_i} - \right. \right. \\ \qquad \left. \left. - e^{-x_{3m} t_i}\right) - y_i \} \rangle \right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) \begin{matrix} < 0 \\ \geq 0 \end{matrix} \\ x_{1m} & \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1M} & \text{für } (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \\ x_{1m} & \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} t_i^3 e^{-x_{3m}t_i} & \text{für } 2\,\xi_i(e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \begin{matrix} < 0 \\ \geq 0 \end{matrix} \\ t_i^3 e^{-x_{3M}t_i} & \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} t_i^3 e^{-x_{3M}t_i} & \text{für } 2\,\chi_i(e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \\ t_i^3 e^{-x_{3m}t_i} & \end{cases}$$

$$F_{2222} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \langle 7\, x_{1m}^2\, t_i^4 e^{-2x_{2m}t_i} + \varphi_i \{ \xi_i (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \} \rangle \right| \\ \left| \sum_i \langle 7\, x_{1M}^2\, t_i^4 e^{-2x_{2M}t_i} + \psi_i \{ \chi_i (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \} \rangle \right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \\ x_{1M} & \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) \begin{matrix} \leq 0 \\ > 0 \end{matrix} \\ x_{1M} & \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^4 e^{-x_{2M}t_i} & \text{für } \xi_i(e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \\ x_{1m}\, t_i^4 e^{-x_{2m}t_i} & \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} x_{1m}\, t_i^4 e^{-x_{2m}t_i} & \text{für } \chi_i(e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \\ x_{1M}\, t_i^4 e^{-x_{2M}t_i} & \end{cases}$$

$$F_{3333} \leq \max \begin{cases} \left| \sum_i \langle 7\, x_{1m}^2\, t_i^4 e^{-2x_{3m}t_i} - \varphi_i \{ \xi_i (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i \} \rangle \right| \\ \left| \sum_i \langle 7\, x_{1M}^2\, t_i^4 e^{-2x_{3M}t_i} - \psi_i \{ \chi_i (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \} \rangle \right| \end{cases}$$

wobei

$$\xi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) \begin{matrix} < 0 \\ \geq 0 \end{matrix} \\ x_{1M} & \end{cases}$$

$$\chi_i := \begin{cases} x_{1m} & \text{für } (e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) \geq 0 \\ x_{1M} & < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^4 e^{-x_{3M}t_i} & \text{für } \xi_i(e^{-x_{2M}t_i} - e^{-x_{3m}t_i}) - y_i < 0 \\ x_{1m}\, t_i^4 e^{-x_{3m}t_i} & \geq 0 \end{cases}$$

$$\psi_i := \begin{cases} x_{1M}\, t_i^4 e^{-x_{3M}t_i} & \text{für } \chi_i(e^{-x_{2m}t_i} - e^{-x_{3M}t_i}) - y_i \geq 0 \\ x_{1m}\, t_i^4 e^{-x_{3m}t_i} & < 0 \end{cases}$$

Die übrigen Abschätzungen ergeben sich aus den Gleichheiten zwischen gemischten Ableitungen.

Diese allgemeinen Betrachtungen sollen nun in Zahlen konkretisiert werden. Hierfür werden die auszugleichenden Werte so gewählt, daß sie der Gleichung genügen

$$y_i = x_1(e^{-x_2 t_i} - e^{-x_3 t_i})$$

$$i = 1(1)20 \quad , \quad t_i = i \cdot 0.15$$

$$x_1 = 3.0 \quad , \quad x_2 = 1.0 \quad , \quad x_3 = 2.0$$

Die betrachtete Aufgabe (5.3) besitzt dann offensichtlich die Lösung

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (3.0 \ , \ 1.0 \ , \ 2.0)$$

Für verschiedene Startnäherungen x^0 können nun die Konvergenzvoraussetzungen der in dieser Arbeit betrachteten Verfahren überprüft werden. (Hierbei zeigt sich, daß x^0 bereits sehr dicht bei x^* liegen muß, damit die Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Verfahren erfüllt sind.) Fehlerabschätzungen sollen hier nur für das Newton-Verfahren und für das Halley-Verfahren betrachtet werden, da die übrigen Fehlerabschätzungen sich mittelbar auf die Fehlerabschätzungen für das Newton-Verfahren beziehen und daher natürlich nicht besser sein können als letztere. Für das Newton-Verfahren wird die Fehlerabschätzung nach Satz I.4 verwendet, wobei die unbekannten Größen β_1 und μ_1 (es wird hier jeweils nur der erste Schritt betrachtet, so daß nur β_0 und μ_0 verfügbar sind) gemäß

$$\beta_1 \leq \frac{\beta_0}{1 - \mu_0} \quad ; \quad \mu_1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{1 - \mu_0}\right)^2$$

abgeschätzt werden. Für das Halley-Verfahren werden hier insbesondere die Konvergenzbedingungen der Sätze III.1 und III.8 überprüft. Die Fehlerschranken für das Halley-Verfahren wurden rekursiv berechnet. (Siehe hierzu die Ausführungen im Anschluß an Satz III.7, die sich leicht auf die Sätze III.1 und III.8 anwenden lassen.)

Als Startnäherung werde gewählt:

$$x^0 := (2.99999786 \ , \ 0.99999786 \ , \ 1.99999786)$$

Dann lautet die erste Newton-Näherung

$$x_N^1 = (3.0000000026629 \ , \ 1.0000000002856 \ , \ 1.9999999993009)$$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \varepsilon_0 = 0.21426629467289\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius 2 ε_0 um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_N^M = (3.0000021453259\ ,\ 1.0000021453259\ ,\ 2.0000021453259)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_N^m = (2.9999935746741\ ,\ 0.9999935746741\ ,\ 1.9999935746741)$$

Es sollen nun die Normen der Ableitungen berechnet werden. Die Norm der Inversen der ersten Ableitung an der Startstelle lautet:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| = \beta_0 = 2235.7096977459$$

Die Norm der 2. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F''(x_0) \| = K_{2_0} = 104.35343643235$$

Die Norm der 2. Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^N = 104.35526832045$$

Die Norm der 3. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F'''(x_0) \| = K_{3_0} = 447.38762393181$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^N = 447.39596289651$$

Für die Sätze über das Halley-Verfahren sind noch weitere Betrachtungen notwendig. Die erste Halley-Näherung ist

$$x_H^1 = (2.9999999999998\ ,\ 0.99999999999998\ ,\ 2.0000000000001)$$

Die Norm der Halley-Korrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.21400000581839\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius 2 δ_0 um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_H^M = (3.0000021400001\ ,\ 1.0000021400001\ ,\ 2.0000021400001)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_H^m = (2.9999935799999\ ,\ 0.99999357999988\ ,\ 1.9999935799999)$$

Die Norm der 2. Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^H = 104.35526604377$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^H = 447.39595253280$$

Man verfügt nun über alle Informationen, die zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze notwendig sind. Es ist

$$\mu_0^N = \beta_0 K_2^N \varepsilon_0 = 0.49990058974793$$

$$\chi_0 = \beta_0 K_3^N \varepsilon_0^2 = 0.45921407446710\ 10^{-5}$$

$$\mu_0^H = \beta_0 K_2^H \delta_0 = 0.49927930542728$$

$$\nu_0 = \beta_0 K_3^H \delta_0^2 = 0.45807335618298\ 10^{-5}$$

Sofern die Konvergenzvoraussetzungen eines Satzes erfüllt sind, wird

dies durch "+" gekennzeichnet, anderenfalls steht ein "-". Man hat dann:

Satz I.2	+
Satz II.1	+
Satz II.7	-
Satz II.14	+
Satz III.1	+
Satz III.7	+
Satz III.8	+
Satz III.9 (R = 2)	+
Satz III.13	-
Satz III.18	+
Satz IV.1	-
Satz IV.3	-

Für die einzelnen Verfahren ist also

Newton-Verfahren	+
Tschebyscheff-Verfahren	+
Halley-Verfahren	+
Verfahren 4. Ordnung	-
Verfahren 5. Ordnung	-

Es sollen nun noch die Fehlerabschätzungen für das Newton- und Halley-Verfahren betrachtet werden. Die Fehlerabschätzung für das Newton-Verfahren lautet

$$\| x^* - x_N^1 \| \leq 2.083078402\ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist:

$$\| x^* - x_N^1 \| = 2.6629\ 10^{-9}$$

Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.1 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 3.739433784\ 10^{-7}$$

Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.8 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 3.911819582\ 10^{-7}$$

Tatsächlich ist

$$\| x^* - x_H^1 \| = 2.0\ 10^{-13}$$

Als Startnäherung werde gewählt:

$$x^0 := (3.00000215\ ,\ 1.00000215\ ,\ 2.00000215)$$

Dann lautet die erste Newton-Näherung

$$x_N^1 = (3.0000000026686\ ,\ 1.0000000002862\ ,\ 1.9999999992993)$$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.215070072157\,39\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius 2 δ_0 um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_N^M = (3.0000064514014\ ,\ 1.0000064514014\ ,\ 2.0000064514014)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_N^m = (2.9999978485986\ ,\ 0.99999784859855\ ,\ 1.9999978485986)$$

Es sollen nun die Normen der Ableitungen berechnet werden. Die Norm der Inversen der ersten Ableitung an der Startstelle lautet:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| = \beta_0 = 2223.5176003301$$

Die Norm der 2. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F''(x_0) \| = K_{20} = 104.35218261676$$

Die Norm der 2. Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^N = 104.35402135114$$

Die Norm der 3. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F'''(x_0) \| = K_{30} = 447.38143733986$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^N = 447.38980745627$$

Für die Sätze über das Halley-Verfahren sind noch weitere Betrachtungen notwendig. Die erste Halley-Näherung ist

$$x_H^1 = (3.000000000026 \ , \ 1.0000000000003 \ , \ 1.9999999999993)$$

Die Norm der Halley-Korrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.21500006662576 \ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius $2\,\delta_0$ um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_H^M = (3.0000064500013 \ , \ 1.0000064500013 \ , \ 2.0000064500013)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_H^m = (2.9999978499987 \ , \ 0.99999784999866 \ , \ 1.9999978499987)$$

Die Norm der 2. Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^H = 104.35402075262$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^H = 447.38980473177$$

Man verfügt nun über alle Informationen, die zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze notwendig sind. Es ist

$$\mu_0^N = \beta_0 K_2^N \eta_0 = 0.49903354728104$$

$$\chi_0 = \beta_0 K_2^N \eta_0^2 = 0.46013643011413 \ 10^{-5}$$

$$\mu_0^H = \beta_0 K_2^H \delta_0 = 0.49887110848238$$

$$\gamma_0 = \beta_0 K_3^H \delta_0^2 = 0.45983692629487 \ 10^{-5}$$

Sofern die Konvergenzvoraussetzungen eines Satzes erfüllt sind, wird dies durch "+" gekennzeichnet, anderenfalls steht ein "-". Man hat dann:

Satz I.2	+
Satz II.1	+
Satz II.7	-
Satz II.14	+
Satz III.1	+
Satz III.7	+
Satz III.8	+

Satz III.1 +
Satz III.3 -
Satz III.8 +
Satz IV.1 -
Satz IV.3 -

Für die [illegible]

[illegible] -
Newton-Verfahren +
Halley-Verfahren +
Verfahren 1. Ordnung -
Verfahren 5. Ordnung -

Es sollen nun noch die Fehlerabschätzungen für das Newton- und Halley-Verfahren betrachtet werden. Die Fehlerabschätzung für das Newton-Verfahren lautet:

$$\| x^* - x_N^1 \| \leq 1.969554435\ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist:

$$\| x^* - x_N^1 \| = 2.6686\ 10^{-9}$$

Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.1 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 3.745744583\ 10^{-7}$$

Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.8 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 3.917416051\ 10^{-7}$$

Tatsächlich ist

$$\| x^* - x_H^1 \| = 2.6\ 10^{-12}$$

Als Startnäherung werde gewählt:

$$x^0 := (2.99999745\ ,\ 0.99999745\ ,\ 1.99999745)$$

Dann lautet die erste Newton-Näherung

$$x_N^1 = (3.0000000042203\ ,\ 1.0000000004513\ ,\ 1.9999999988761)$$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \varepsilon_0 = 0.25542203325526\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius $2\varepsilon_0$ um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_N^M = (3.0000025584407\ ,\ 1.0000025584407\ ,\ 2.0000025584407)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_N^m = (2.9999923415593\ ,\ 0.99999234155933\ ,\ 1.9999923415593)$$

Es sollen nun die Normen der Ableitungen berechnet werden. Die Norm der Inversen der ersten Ableitung an der Startstelle lautet:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| = \beta_0 = 2236.8819591276$$

Die Norm der 2. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F''(x_0) \| = K_{2_0} = 104.35355626190$$

Die Norm der 2. Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^N = 104.35574002094$$

Die Norm der 3. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F'''(x_0) \| = K_{30} = 447.38821519637$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^N = 447.39815592188$$

Für die Sätze über das Halley-Verfahren sind noch weitere Betrachtungen notwendig. Die erste Halley-Näherung ist

$$x_H^1 = (3.0000000004345 \ , \ 1.0000000000452 \ , \ 1.9999999998700)$$

Die Norm der Halley-Korrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.25504345010533 \ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius $2\,\delta_0$ um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_H^M = (3.0000025508690 \ , \ 1.0000025508690 \ , \ 2.0000025508690)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_H^m = (2.9999923491310 \ , \ 0.99999234913099 \ , \ 1.9999923491310)$$

Die Norm der 2. Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^H = 104.35573678378$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^H = 447.39814118637$$

Man verfügt nun über alle Informationen, die zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze notwendig sind. Es ist

$$\mu_0^N = \beta_0 K_2^N \eta_0 = 0.59623541251070$$

$$\chi_0 = \beta_0 K_3^N \eta_0^2 = 0.65291097971313 \ 10^{-5}$$

$$\mu_0^H = \beta_0 K_2^H \delta_0 = 0.59535166182233$$

$$\nu_0 = \beta_0 K_3^H \delta_0^2 = 0.65097692064935 \ 10^{-5}$$

Sofern die Konvergenzvoraussetzungen eines Satzes erfüllt sind, wird dies durch "+" gekennzeichnet, anderenfalls steht ein "-". Man hat dann:

Satz I.2	-
Satz II.1	-
Satz II.7	-
Satz II.14	-
Satz III.1	+
Satz III.7	+
Satz III.8	+
Satz III.9 (R = 2)	-
Satz III.13	-
Satz III.18	-
Satz IV.1	-
Satz IV.3	-

Für die einzelnen Verfahren ist also

Newton-Verfahren	-
Tschebyscheff-Verfahren	-
Halley-Verfahren	+
Verfahren 4. Ordnung	-
Verfahren 5. Ordnung	-

Es sollen nun noch die Fehlerabschätzungen für das Halley-Verfahren betrachtet werden. Die Abschätzung nach Satz III.1 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 1.037111522\ 10^{-6}$$

Die Abschätzung nach Satz III.8 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 1.701230568\ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist

$$\| x^* - x_H^1 \| = 4.345\ 10^{-10}$$

Als Startnäherung werde gewählt:

$$x^0 := (3.00000256\ ,\ 1.00000256\ ,\ 2.00000256)$$

Dann lautet die erste Newton-Näherung

$$x_N^1 = (3.0000000037817\ ,\ 1.0000000004055\ ,\ 1.9999999990070)$$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \mathcal{S}_0 = 0.25609929981581\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius $2\,\mathcal{S}_0$ um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_N^M = (3.0000076819860\ ,\ 1.0000076819860\ ,\ 2.0000076819860)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_N^m = (2.9999974380140\ ,\ 0.99999743801400\ ,\ 1.9999974380140)$$

Es sollen nun die Normen der Ableitungen berechnet werden. Die Norm der Inversen der ersten Ableitung an der Startstelle lautet:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| = \beta_0 = 2222.3593626217$$

Die Norm der 2. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F''(x_0) \| = K_{20} = 104.35206278918$$

Die Norm der 2. Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^N = 104.35425230260$$

Die Norm der 3. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F'''(x_0) \| = K_{30} = 447.38084608561$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^N = 447.39081298550$$

Für die Sätze über das Halley-Verfahren sind noch weitere Betrachtungen notwendig. Die Halley-Korrektur ist

$$x_H^1 = (3.0000000000049\ ,\ 1.0000000000005\ ,\ 1.9999999999987)$$

Die Norm der Halley-Korrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.25600012497131\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius $2\,\delta_0$ um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_H^M = (3.0000076800025\ ,\ 1.0000076800025\ ,\ 2.0000076800025)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_H^m = (2.9999974399975\ ,\ 0.99999743999749\ ,\ 1.9999974399975)$$

Die Norm der 2. Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$K_2^H = 104.35425145470$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$K_3^H = 447.39080912576$

Man verfügt nun über alle Informationen, die zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze notwendig sind. Es ist

$$\mu_o^N = \beta_o K_2^N \varepsilon_o = 0.59392667189714$$

$$\chi_o = \beta_o K_3^N \varepsilon_o^2 = 0.65210590224223\ 10^{-5}$$

$$\mu_o^H = \beta_o K_2^H \delta_o = 0.59369666806357$$

$$\nu_o = \beta_o K_3^H \delta_o^2 = 0.65160093640228\ 10^{-5}$$

Sofern die Konvergenzvoraussetzungen eines Satzes erfüllt sind, wird dies durch "+" gekennzeichnet, anderenfalls steht ein "-". Man hat dann:

Satz I.2	-
Satz II.1	-
Satz II.7	-
Satz III.1	+
Satz III.7	+
Satz III.8	+
Satz III.9 (R = 2)	-
Satz III.13	-
Satz III.18	-
Satz IV.1	-
Satz IV.3	-

Für die einzelnen Verfahren ist also

Newton-Verfahren	-
Tschebyscheff-Verfahren	-
Halley-Verfahren	+
Verfahren 4. Ordnung	-
Verfahren 5. Ordnung	-

Es sollen nun noch die Fehlerabschätzungen für das Halley-Verfahren betrachtet werden. Die Abschätzung nach Satz III.1 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 1.017641893\ 10^{-6}$$

Die Abschätzung nach Satz III.8 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 1.44660636\ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist

$$\| x^* - x_H^1 \| = 4.9\ 10^{-12}$$

Als Startnäherung werde gewählt:

$x^0 := (2.99999738\ ,\ 0.99999738\ ,\ 1.99999738)$

Dann lautet die erste Newton-Näherung

$x_N^1 = (3.0000000039914\ ,\ 1.0000000004281\ ,\ 1.9999999989521)$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \varepsilon_0 = 0.26239913919340\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius $2\varepsilon_0$ um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_N^M = (3.0000026279828\ ,\ 1.0000026279828\ ,\ 2.0000026279828)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_N^m = (2.9999921320172\ ,\ 0.99999213201722\ ,\ 1.9999921320172)$$

Es sollen nun die Normen der Ableitungen berechnet werden. Die Norm der Inversen der ersten Ableitung an der Startstelle lautet:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| = \beta_0 = 2237.0821902515$$

Die Norm der zweiten Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F''(x_0) \| = K_{20} = 104.35357672054$$

Die Norm der zweiten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^N = 104.35582013281$$

Die Norm der dritten Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F'''(x_0) \| = K_{30} = 447.38831614399$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^N = 447.39852841707$$

Für die Sätze über das Halley-Verfahren sind noch weitere Betrachtungen notwendig. Die erste Halley-Näherung ist

$$x_H^1 = (2.9999999999959\ ,\ 0.99999999999955\ ,\ 2.0000000000011)$$

Die Norm der Halley-Korrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.26200010619063\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius $2\delta_0$ um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_H^M = (3.0000026200021\ ,\ 1.0000026200021\ ,\ 2.0000026200021)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_H^m = (2.9999921399979\ ,\ 0.99999213999788\ ,\ 1.9999921399979)$$

Die Norm der zweiten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^H = 104.35581672119$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^H = 447.39851288697$$

Man verfügt nun über alle Informationen, die zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze notwendig sind. Es ist

$$\mu_0^N = \beta_0 K_2^N \varepsilon_0 = 0.61257747288245$$

$$\alpha_0 = \beta_0 K_3^N \varepsilon_0^2 = 0.68913023337430\ 10^{-5}$$

$$\mu_0^H = \beta_0 K_2^H \delta_0 = 0.61164590017938$$

$$\nu_0 = \beta_0 K_3^H \delta_0^2 = 0.68703586866480\ 10^{-5}$$

Sofern die Konvergenzvoraussetzungen eines Satzes erfüllt sind, wird dies durch "+" gekennzeichnet, anderenfalls steht ein "-". Dann hat man:

Satz I.2	-
Satz II.1	-
Satz II.7	-
Satz II.14	-
Satz III.1	+
Satz III.7	-
Satz III.8	-
Satz III.9 (R = 2)	-
Satz III.13	-
Satz III.18	-
Satz IV.1	-
Satz IV.3	-

Für die einzelnen Verfahren ist also

Newton-Verfahren	-
Tschebyscheff-Verfahren	-
Halley-Verfahren	+
Verfahren 4. Ordnung	-
Verfahren 5. Ordnung	-

Es soll nun noch die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren betrachtet werden. Die Abschätzung nach Satz III.1 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 1.615899446\ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist

$$\| x^* - x_H^1 \| = 4.1\ 10^{-12}$$

Als Startnäherung werde gewählt:

$$x^0 := (3.00000263\ ,\ 1.00000263\ ,\ 2.00000263)$$

Dann lautet die erste Newton-Näherung

$$x_N^1 = (3.0000000039944\ ,\ 1.0000000004283\ ,\ 1.9999999989512)$$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \varepsilon_0 = 0.26310488316899\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius $2\varepsilon_0$ um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_N^M = (3.0000078920977\ ,\ 1.0000078920977\ ,\ 2.0000078920977)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_N^m = (2.9999973679023\ ,\ 0.99999736790233\ ,\ 1.9999973679023)$$

Es sollen nun die Normen der Ableitungen berechnet werden. Die Norm der Inversen der ersten Ableitung an der Startstelle lautet:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| = \beta_0 = 2222.1617355838$$

Die Norm der 2. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F''(x_0) \| = K_{2_0} = 104.35204233083$$

Die Norm der 2. Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^N = 104.35429173846$$

Die Norm der 3. Ableitung an der Startstelle ist

$$\| F'''(x_0) \| = K_{3_0} = 447.38074513985$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^N = 447.39098468454$$

Für die Sätze über das Halley-Verfahren sind noch weitere Betrachtungen notwendig. Die Halley-Korrektur ist

$$x_H^1 = (3.0000000000088\ ,\ 1.0000000000010\ ,\ 1.9999999999977)$$

Die Norm der Halley-Korrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.26300022457575\ 10^{-5}$$

Es kann nun die Kugel mit Radius $2\delta_0$ um den Startvektor bestimmt werden. Der Vektor der oberen Kugelgrenze ist

$$x_H^M = (3.0000078900045\ ,\ 1.0000078900045\ ,\ 2.0000078900045)$$

Der Vektor der unteren Kugelgrenze ist

$$x_H^m = (2.9999973699955\ ,\ 0.99999736999550\ ,\ 1.9999973699955)$$

Die Norm der zweiten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_2^H = 104.35429084367$$

Die Norm der dritten Ableitung über die Kugel abgeschätzt liefert:

$$K_3^H = 447.39098061137$$

Man verfügt nun über alle Informationen, die zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze notwendig sind. Es ist

$$\mu_0^N = \beta_0 K_2^N \delta_0 = 0.61011947573662$$

$$\chi_0 = \beta_0 K_3^N \delta_0^2 = 0.68820957493747\ 10^{-5}$$

$$\mu_0^H = \beta_0 K_2^H \delta_0 = 0.60987677548283$$

$$\nu_0 = \beta_0 K_3^H \delta_0^2 = 0.68766216172989\ 10^{-5}$$

Sofern die Konvergenzvoraussetzungen eines Satzes erfüllt sind, wird dies durch "+" gekennzeichnet, anderenfalls steht ein "-". Dann hat man:

Satz I.2	-
Satz II.1	-
Satz II.7	-
Satz III.1	+
Satz III.7	-
Satz III.8	-
Satz III.9 (R = 2)	-
Satz III.13	-
Satz III.18	-
Satz IV.1	-
Satz IV.3	-

Für die einzelnen Verfahren ist also

Newton-Verfahren	-
Tschebyscheff-Verfahren	-
Halley-Verfahren	+
Verfahren 4. Ordnung	-
Verfahren 5. Ordnung	-

Es soll nun noch die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren betrachtet werden. Die Abschätzung nach Satz III.1 lautet:

$$\| x^* - x_H^1 \| \leq 1.437548564\ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist

$$\| x^* - x_H^1 \| = 8.8\ 10^{-12}$$

Aus diesen und weiteren numerischen Untersuchungen ergibt sich zusammenfassend folgendes Ergebnis: Um die Konvergenzvoraussetzungen der in dieser Arbeit betrachteten Verfahren gerade noch erfüllen zu können, müssen folgende Startvektoren gewählt werden:

Halley-Verfahren:

$x^0 = (2.99999738 , 0.99999738 , 1.99999738)$

bzw. $x^0 = (3.00000263 , 1.00000263 , 1.00000263)$

Newton-Verfahren:

$x^0 = (2.99999786 , 0.99999786 , 1.99999786)$

bzw. $x^0 = (3.00000215 , 1.00000215 , 2.00000215)$

Tschebyscheff-Verfahren:

$x^0 = (2.99999786 , 0.99999786 , 1.99999786)$

bzw. $x^0 = (3.00000215 , 1.00000215 , 2.00000215)$

Verfahren 4. Ordnung:

$x^0 = (2.99999830 , 0.99999830 , 1.99999830)$

bzw. $x^0 = (3.00000171 , 1.00000171 , 2.00000171)$

Verfahren 5. Ordnung:

$x^0 = (2.99999841 , 0.99999841 , 1.99999841)$

bzw. $x^0 = (3.00000160 , 1.00000160 , 2.00000160)$

Übersichtlicher wird diese Aufstellung, wenn man statt der Startnäherungen deren Differenzen zur Lösung betrachtet:

Halley-Verfahren:

$2.62\ 10^{-6}$ bzw. $2.63\ 10^{-6}$

Newton-Verfahren:

$2.14\ 10^{-6}$ bzw. $2.15\ 10^{-6}$

Tschebyscheff-Verfahren:

$2.14\ 10^{-6}$ bzw. $2.15\ 10^{-6}$

Verfahren 4. Ordnung:

$1.70\ 10^{-6}$ bzw. $1.71\ 10^{-6}$

Verfahren 5. Ordnung:

$1.59\ 10^{-6}$ bzw. $1.60\ 10^{-6}$

Die Tatsache, daß das Halley-Verfahren einen um mehr als 20% größeren Konvergenzbereich besitzt als das Newton-Verfahren und daß das Tschebyscheff-Verfahren einen praktisch gleich großen Konvergenzbereich wie letzteres besitzt, ist im Lichte der bisher zu Verfahren höherer Ordnung allgemein vertretenen Ansichten sicher ein überraschendes Ergebnis.

Literatur:

[1] Henrici, P. — Elemente der numerischen Analysis I, II
Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich. 1972

[2] Isaacson, E.
Keller, H. B. — Analyse numerischer Verfahren
Verlag Harri Deutsch, Zürich/Frankfurt a. M. 1973

[3] Jordan-Engeln, G.
Reuter, F. — Numerische Mathematik für Ingenieure
Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich. 1972

[4] Stoer, J.
Bulirsch, R. — Einführung in die Numerische Mathematik I,II
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York. 1973

Kapitel VI

Ein Beispiel in Funktionenräumen

In diesem Kapitel soll die Lösung eines nichtlinearen Vielpunkt-Randwertproblems für ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit Hilfe der in dieser Arbeit behandelten Iterationsverfahren betrachtet werden. Hierfür ist es zunächst erforderlich, eine derartige Aufgabe in der Form einer Operatorgleichung auf einem Banach-Raum darzustellen. Wie man zu einer derartigen Darstellung gelangt, wird im folgenden kurz gezeigt; hierbei kann jedoch nicht auf subtilere Fragestellungen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen eingegangen werden, da dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Die Fundamentalmatrix: Auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei eine Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} y(t) = V(t)\ y(t) + f(t)$$

gegeben mit $f,y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$; $V : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$. Die durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi^V(t,s) = V(t)\ \Phi^V(t,s) \quad ; \quad \Phi^V(s,s) = I$$

definierte Abbildung

$$\Phi^V : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$$

heißt Fundamentalmatrix oder Übertragungsmatrix der gegebenen Differentialgleichung. (Hierbei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß die auftretenden Differentialgleichungssysteme lösbar sind.)

Einige wichtige Eigenschaften dieser Fundamentalmatrix ergeben sich aus dem folgenden Satz.

Satz VI.1: Die Matrix $\Phi^V(t,s)$ sei definiert durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi^V(t,s) = V(t)\ \Phi^V(t,s) \quad ; \quad \Phi^V(s,s) = I$$

Dann gilt:

(6.1) $$\Phi^V(t,s)\ \Phi^V(s,\tau) = \Phi^V(t,\tau)$$

(6.2) $$\Phi^V(t,s)^{-1} = \Phi^V(s,t)$$

(6.3) $$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi^V(t,\tau) = - \Phi^V(t,\tau)\ V(\tau)$$

Beweis: Es sei $X(\tau)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{d\tau} X(\tau) = V(\tau) \; X(\tau) \quad ; \quad X(a) = I$$

Dann gilt:

$$\Phi^V(t,s) = X(t) \; X(s)^{-1}$$

denn:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[X(t) \; X(s)^{-1} \right] = \frac{dX(t)}{dt} X(s)^{-1} = V(t) \left[X(t) \; X(s)^{-1} \right]$$

$$X(s) \; X(s)^{-1} = I$$

Hieraus folgt aber sofort (6.1) - (6.3), denn:

$$\begin{aligned} \Phi^V(t,s) \; \Phi^V(s,\tau) &= X(t) \; X(s)^{-1} X(s) \; X(\tau) \\ &= X(t) \; X(\tau) \\ &= \Phi^V(t,\tau) \qquad \Rightarrow (6.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\Phi^V(t,s) \right]^{-1} &= \left[X(t) \; X(s)^{-1} \right]^{-1} \\ &= X(s) \; X(t)^{-1} \\ &= \Phi^V(s,t) \qquad \Rightarrow (6.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi^V(t,\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left[X(t) \; X(\tau)^{-1} \right] \\ &= X(t) \; \frac{\partial X(\tau)^{-1}}{\partial \tau} \\ &= X(t) \left[- X(\tau)^{-1} \; \frac{dX(\tau)}{d\tau} X(\tau)^{-1} \right] \\ &= - X(t) \; X(\tau)^{-1} V(\tau) \; X(\tau)^{-1} \\ &= - \Phi^V(t,\tau) \; V(\tau) \qquad \Rightarrow (6.3) \end{aligned}$$

■

Mit Hilfe der Fundamentalmatrix einer linearen Differentialgleichung kann man letztere in Integraldarstellungen umformen. Derartige Umformungen ermöglichen es dann, Randwertprobleme als Operatorgleichungen in Banach-Räumen zu schreiben und mit Hilfe der in dieser Arbeit dargestellten numerischen Verfahren zu lösen. Die wichtigsten hier erforderlichen Zusammenhänge ergeben sich aus den folgenden Sätzen.

Satz VI.2: Es sei $Y : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$Y(t,\tau) := \Phi^V(t,\tau) \; y(\tau) + \int_\tau^t \Phi^V(t,s) \; f(s) \; ds$$

wobei y eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = V(t)\; y(t) + f(t)$$

ist. Dann gilt:
(6.4) $Y(t,\tau)$ ist bei festem t als Funktion von τ konstant.
(6.5) Es ist $y(t) = Y(t,\tau)$ für beliebiges, festes τ.

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\, Y(t,\tau) = \frac{\partial\, \Phi^{V}(t,\tau)}{\partial \tau}\, y(\tau) + \Phi^{V}(t,\tau)\; \frac{dy(\tau)}{d\tau} - \Phi^{V}(t,\tau)\; f(\tau)$$

$$= -\,\Phi^{V}(t,\tau)\; V(\tau)\; y(\tau) + \Phi(t,\tau)\,\big[V(\tau)\; y(\tau) + f(\tau)\big] -$$
$$-\,\Phi^{V}(t,\tau)\; f(\tau)$$
$$= 0 \qquad \Rightarrow \quad (6.4)$$

Sei τ beliebig, aber fest. Dann

$$\frac{\partial}{\partial t}\, Y(t,\tau) = \frac{\partial\, \Phi^{V}(t,\tau)}{\partial\, t} \left\{ y(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Phi^{V}(\tau,s)\; f(s)\; ds \right\} +$$

$$+\; \Phi^{V}(t,\tau)\; \Phi^{V}(\tau,t)\; f(t)$$
$$= V(t)\; \Phi^{V}(t,\tau) \left\{ y(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Phi^{V}(\tau,s)\; f(s)\; ds \right\} + f(t)$$
$$= V(t)\; Y(t,\tau) + f(t)$$

Außerdem gilt $Y(\tau,\tau) = y(\tau)$. Da die Lösung einer linearen Differentialgleichung durch einen gegebenen Punkt eindeutig ist, folgt hieraus $Y(t,\tau) = y(t)$ für jedes feste τ. Also gilt (6.5). ■

Satz VI.3: Es sei $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = V(t)\; y(t) + f(t)$$

genügt. $V : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$y(t) = \Phi^{V}(t,\tau)\; y(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Phi^{V}(t,s)\; f(s)\; ds$$

Beweis: Sei $Y(t,\tau) := \Phi^{V}(t,\tau)\; y(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Phi^{V}(t,s)\; f(s)\; ds$ dann gilt für jedes feste τ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\, Y(t,\tau) = V(t)\; Y(t,\tau) + f(t)$$

Außerdem ist $Y(\tau,\tau) = y(\tau)$.
Aus der Eindeutigkeit der Lösung einer linearen Differentialgleichung durch einen gegebenen Punkt folgt dann die Behauptung. ■

Die beiden letzten Sätze lassen sich zusammenfassen zu

Satz VI.4: Die Abbildung $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lösung

der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = V(t)\; y(t) + f(t)$$

mit $V : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, wenn gilt

$$y(t) = \Phi^V(t,\tau)\; y(\tau) + \int_\tau^t \Phi^V(t,s)\; f(s)\; ds$$

Mit Hilfe dieser Überlegungen soll nun ein Randwertproblem behandelt werden.

Gegeben sei das lineare Vielpunkt-Randwertproblem

(6.6) $$\dot{y}(t) = V(t)\; y(t) + f(t)$$

(6.7) $$\sum_{t_i = a}^{b} A(t_i)\; y(t_i) = c$$

mit $y,f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $V,A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$, $c \in \mathbb{R}^n$.
Dabei sei je nach Aufgabenstellung

$$\sum_{t_i = a}^{b} A(t_i)\; y(t_i) := \begin{cases} \sum_i A_i\; y(t_i) \\ \int_a^b A(t)\; y(t)\; dt \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (6.6) kann man nach Satz VI.4 schreiben als

$$y(t) = \Phi^V(t,\tau)\; y(\tau) + \int_\tau^t \Phi^V(t,s)\; f(s)\; ds \qquad \forall\, \tau \in [a,b]$$

Man erhält also

$$y(t) = \Phi^V(t,\tau)\; y(\tau) + \int_\tau^t \Phi^V(t,s)\; f(s)\; ds \qquad \text{für } \tau < t$$

$$y(t) = \Phi^V(t,\tau)\; y(\tau) - \int_t^\tau \Phi^V(t,s)\; f(s)\; ds \qquad \text{für } t < \tau$$

In beiden Fällen wird dann im Sinne eines "wachsenden s" integriert, so daß man beide Fälle zusammenfassen kann zu:

(6.8) $$y(t) = \Phi^V(t,\tau)\; y(\tau) + \int_a^b \Psi(\tau,t,s)\; f(s)\; ds \qquad \forall\, \tau \in [a,b]$$

mit

(6.9) $$\Psi(\tau,t,s) := \begin{cases} \Phi^V(t,s) & \text{für } \tau < s < t \\ -\Phi^V(t,s) & \text{für } t < s < \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn man mit der Darstellung (6.8), (6.9) in die Randbedingung (6.7) eingeht, erhält man:

$$\sum_{t_i = a}^{b} \left\{ A(t_i)\; \Phi^V(t_i,\tau)\; y(\tau) + A(t_i) \int_a^b \Psi(\tau,t_i,s)\; f(s)\; ds \right\} = c \qquad \forall\, \tau \in [a,b]$$

oder

(6.10) $$\left\{ \sum_{t_i = a}^{b} A(t_i)\; \Phi^V(t_i,a) \right\} \Phi^V(a,\tau)\; y(\tau) = c - \sum_{t_i = a}^{b} \int_a^b A(t_i)\; \Psi(\tau,t_i,s)\; f(s)\; ds \qquad \forall\, \tau \in [a,b]$$

Gilt nun

$$\det \left\{ \sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,a) \right\} \neq 0$$

so kann man (6.10) nach $y(\tau)$ auflösen und erhält.

$$(6.11)\qquad y(\tau) = \Phi^{\nu}(a,\tau)^{-1} \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,a) \right]^{-1} c - \Phi^{\nu}(a,\tau)^{-1} \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,a) \right]^{-1} \sum_{t_i=a}^{b} \int_{a}^{b} A(t_i)\, \Psi(\tau,t_i,s)\, f(s)\, ds$$

Oder

$$(6.12)\qquad y(\tau) = H(\tau)c + \int_{a}^{b} G(\tau,s)\, f(s)\, ds$$

mit

$$(6.13)\qquad H(\tau) := \Phi^{\nu}(\tau,a) \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,a) \right]^{-1}$$

$$(6.14)\qquad G(\tau,s) := -\Phi^{\nu}(\tau,a) \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,a) \right]^{-1} \sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Psi(\tau,t_i,s)$$

$$(6.15)\qquad \Psi(\tau,t_i,s) := \begin{cases} \Phi^{\nu}(t_i,s) & \text{für } \tau < s < t_i \\ -\Phi^{\nu}(t_i,s) & \text{für } t_i \leq s < \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(6.14) und (6.15) kann man zusammenfassen zu

$$(6.16)\qquad G(\tau,s) = \begin{cases} \Phi^{\nu}(\tau,a) \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,a) \right]^{-1} \sum_{t_i \leq s} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,s) & \text{für } s < \tau \\ -\Phi^{\nu}(\tau,a) \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,a) \right]^{-1} \sum_{t_i > s} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,s) & \text{für } \tau < s \end{cases}$$

Diese Überlegungen zu linearen Vielpunkt-Randwertproblemen lassen sich nun übertragen auf die Behandlung nichtlinearer Vielpunkt-Randwertprobleme: Gegeben sei das nichtlineare Vielpunkt-Randwertproblem

$$(6.17)\qquad \dot{y}(t) = F(t,y(t))$$

$$(6.18)\qquad \sum_{t_i=a}^{b} B(t_i, y(t_i)) = c$$

mit $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $B,F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Schreibt man dies nun mit Hilfe geeigneter Abbildungen $A,V : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$ in der Form

$$(6.19)\qquad \dot{y}(t) = V(t)y(t) + F(t,y(t)) - V(t)y(t)$$

$$(6.20)\qquad \sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, y(t_i) = c - \sum_{t_i=a}^{b} \left[B(t_i, y(t_i)) - A(t_i)\, y(t_i) \right]$$

so erhält man unter Verwendung der Ergebnisse für den linearen Fall die Integralgleichung:

$$(6.21)\qquad y(\tau) = H(\tau) \left\{ c - \sum_{t_i=a}^{b} \left[B(t_i, y(t_i)) - A(t_i)\, y(t_i) \right] \right\} + \int_{a}^{b} G(\tau,s) \left[F(s,y(s)) - V(s)y(s) \right] ds$$

mit

$$(6.22)\qquad H(\tau) := \Phi^{\nu}(\tau,a) \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^{\nu}(t_i,a) \right]^{-1}$$

$$(6.23)\qquad G(\tau,s) := -\Phi^{V}(\tau,a)\left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right]^{-1}\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Psi(\tau,t_i,s)$$

$$(6.24)\qquad \Psi(\tau,t_i,s) := \begin{cases} \Phi^{V}(t_i,s) & \text{für } \tau < s < t_i \\ -\Phi^{V}(t_i,s) & \text{für } t_i \le s < \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Voraussetzung für die Existenz einer solchen Darstellung ist natürlich

$$\det\left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right] \neq 0$$

Sei die Darstellung (6.21) möglich, so ist noch zu zeigen, daß eine Lösung dieser Integralgleichung auch wirklich Lösung der Aufgabe (6.17), (6.18) ist.
Zunächst soll gezeigt werden, daß eine Lösung von (6.21) der Differentialgleichung (6.17) genügt. Es ist

$$(6.25)\qquad \int_a^b G(\tau,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds =$$

$$= -H(\tau)\int_a^b \sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Psi(\tau,t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds$$

$$= -H(\tau)\sum_{t_i=a}^{b}\int_a^b A(t_i)\,\Psi(\tau,t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds$$

$$= H(\tau)\sum_{t_i\le\tau}\int_{s=t_i}^{s=\tau} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds$$

$$- H(\tau)\sum_{t_i>\tau}\int_{s=\tau}^{s=t_i} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds$$

$$= H(\tau)\sum_{t_i=a}^{b}\int_{s=t_i}^{s=\tau} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds$$

Weiter

$$(6.26)\qquad \frac{d}{d\tau}H(\tau) = \frac{\partial\Phi^{V}(\tau,a)}{\partial\tau}\left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right]^{-1}$$

$$= V(\tau)\,\Phi^{V}(\tau,a)\left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right]^{-1}$$

$$= V(\tau)\,H(\tau)$$

Somit unter Beachtung von (6.25), (6.26)

$$(6.27)\qquad \frac{d}{d\tau}y(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left\{H(\tau)\left[c - \sum_{t_i=a}^{b}\left[B(t_i,y(t_i)) - A(t_i)y(t_i)\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{t_i=a}^{b}\int_{t_i}^{\tau} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds\right]\right\}$$

$$= \frac{dH(\tau)}{d\tau}\left[c - \sum_{t_i=a}^{b}\left[B(t_i,y(t_i)) - A(t_i)y(t_i)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{t_i=a}^{b}\int_{t_i}^{\tau} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds\right] +$$

$$+ H(\tau)\sum_{t_i=a}^{b}\frac{d}{d\tau}\int_{t_i}^{\tau} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,s)\left[F(s,y(s) - V(s)y(s)\right]ds$$

$$= V(\tau)\,H(\tau)\left[c - \sum_{t_i=a}^{b}\left[B(t_i,y(t_i)) - A(t_i)y(t_i)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{t_i=a}^{b}\int_{t_i}^{\tau} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds\right] +$$

$$+ H(\tau)\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,\tau)\left[F(\tau,y(\tau)) - V(\tau)\,y(\tau)\right]$$

$$= V(\tau)\, y(\tau) + \Phi^V(\tau,a) \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^V(t_i,a) \right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^V(t_i,\tau) \left[F(\tau, y(\tau)) - V(\tau)\, y(\tau) \right]$$

$$= V(\tau)\, y(\tau) + \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^V(t_i,\tau) \right]^{-1} \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^V(t_i,\tau) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[F(\tau, y(\tau)) - V(\tau)\, y(\tau) \right]$$

$$= F(\tau, y(\tau))$$

Um zu zeigen, daß eine Lösung von (6.21) auch die Randbedingungen (6.18) erfüllt, sind zunächst einige Vorbemerkungen notwendig.

Satz VI.5: Die Abbildung $y(t)$ genüge der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t))$$

Es sei

$$Y(t,\tau) := \Phi^V(t,\tau)\, y(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Phi^V(t,s) \left[F(s, y(s)) - V(s) y(s) \right] ds$$

Dann gilt für jedes t:

$$\frac{\partial Y(t,\tau)}{\partial \tau} = 0$$

Außerdem gilt

$$y(t) = \Phi^V(t,\tau)\, y(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Phi^V(t,s) \left[F(s, y(s)) - V(s) y(s) \right] ds$$

für jedes τ.

Beweis:

$$\frac{\partial Y(t,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi^V(t,\tau)}{\partial \tau}\, y(\tau) + \Phi^V(t,\tau)\, \frac{dy(\tau)}{d\tau} - \Phi^V(t,\tau) \left[F(\tau, y(\tau)) - \right.$$

$$\left. - V(\tau)\, y(\tau) \right]$$

$$= - \Phi^V(t,\tau) V(\tau)\, y(\tau) + \Phi^V(t,\tau) F(\tau, y(\tau)) - \Phi^V(t,\tau) \cdot$$

$$\cdot \left[F(\tau, y(\tau)) - V(\tau)\, y(\tau) \right]$$

$$= 0$$

Also: $Y(t,\tau) = Y(t,t) \quad \forall\, t,\tau$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Hieraus folgt aber wegen

$$Y(t,t) = y(t) = Y(t,\tau)$$

sofort der zweite Teil des Satzes. ■

Nun zum Beweis, daß eine Lösung von (6.21) auch (6.18) erfüllt. Eine Lösung von (6.21) hat wegen (6.22), (6.25) die Gestalt

$$(6.28) \qquad y(\tau) = \left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\, \Phi^V(t_i,\tau) \right]^{-1} \left\{ c - \sum_{t_i=a}^{b} \left[B(t_i, y(t_i)) - \right. \right.$$

$$\left. - A(t_i)\, y(t_i) \right] + \sum_{t_i=a}^{\tau} \int_{t_i} A(t_i)\, \Phi^V(t_i,s) \left[F(s, y(s)) - \right.$$

$$\left. \left. - V(s) y(s) \right] ds \right\}$$

Also gilt:

$$\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,\tau)\,y(\tau) = c - \sum_{t_i=a}^{b}\left[B(t_i,y(t_i)) - A(t_i)\,y(t_i)\right] - \sum_{t_i=a}^{b}\int_{\tau}^{t_i} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds$$

oder

$$\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\left\{\Phi^{V}(t_i,\tau)\,y(\tau) + \int_{\tau}^{t_i}\Phi^{V}(t_i,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)\,y(s)\right]ds\right\} = c - \sum_{t_i=a}^{b} B(t_i,y(t_i)) + \sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,y(t_i)$$

woraus unter Berücksichtigung von Satz VI.5 folgt:

$$\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,y(t_i) = c - \sum_{t_i=a}^{b} B(t_i,y(t_i)) + \sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,y(t_i)$$

Also $$\sum_{t_i=a}^{b} B(t_i,y(t_i)) = c$$

Damit ist nun gezeigt worden:
Gegeben sei das nichtlineare Vielpunkt-Randwertproblem

$$\dot{y}(t) = F(t,y(t))$$
$$\sum_{t_i=a}^{b} B(t_i,y(t_i)) = c \qquad (6.29)$$

mit $y : [a,b]\to\mathbb{R}^n$, $B,F : [a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}^n$.

Gibt es Abbildungen $A,V : [a,b]\to\mathbb{R}^{n,n}$, so daß gilt

$$\det\left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right] \neq 0$$

so ist das Randwertproblem (6.29) äquivalent mit der Integralgleichung

$$y(\tau) = H(\tau)\left\{c - \sum_{t_i=a}^{b}\left[B(t_i,y(t_i)) - A(t_i)\,y(t_i)\right]\right\} + \int_{a}^{b} G(\tau,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right]ds \qquad (6.30)$$

mit

$$H(\tau) := \Phi^{V}(\tau,a)\left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right]^{-1}$$

$$G(\tau,s) := -\Phi^{V}(\tau,a)\left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right]^{-1}\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Psi(\tau,t_i,s)$$

$$\Psi(\tau,t_i,s) := \begin{cases} \Phi^{V}(t_i,s) & \text{für } \tau < s < t_i \\ -\Phi^{V}(t_i,s) & \text{für } t_i \leq s < \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Einsetzen von $\Psi(\tau,t_i,s)$ in den Ausdruck für $G(\tau,s)$ erhält man:

$$G(\tau,s) = \begin{cases} \Phi^{V}(\tau,a)\left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right]^{-1}\left[\sum_{t_i\leq s} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right]\cdot \\ \qquad\cdot\,\Phi^{V}(a,s) \qquad \text{für } a \leq s < \tau \leq b \\ -\Phi^{V}(\tau,a)\left[\sum_{t_i=a}^{b} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right]^{-1}\left[\sum_{t_i>s} A(t_i)\,\Phi^{V}(t_i,a)\right]\cdot \\ \qquad\cdot\,\Phi^{V}(a,s) \qquad \text{für } a \leq \tau < s \leq b \end{cases} \qquad (6.31)$$

Diese Ergebnisse lassen sich nun leicht auf drei wichtige Typen von Vielpunkt-Randwertproblemen spezialisieren:

I) $\dot{y}(t) = F(t,y(t))$

$g_1(y(a)) + g_2(y(b)) = c$

Dann gilt mit geeigneten Matrizen M_1, M_2, $V(t)$:

$$y(t) = H(t)\left\{ c - \left[g_1(y(a)) - M_1 y(a)\right] - \left[g_2(y(b)) - M_2 y(b)\right]\right\} + \int_a^b G(t,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right] ds$$

mit

$$H(t) := \Phi^V(t,a)\left[M_1 + M_2 \Phi^V(b,a)\right]^{-1}$$

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi^V(t,a)\left[M_1 + M_2 \Phi^V(b,a)\right]^{-1} M_1 \Phi^V(a,s) \\ \qquad\qquad \text{für } a \le s < t \le b \\ -\Phi^V(t,a)\left[M_1 + M_2 \Phi^V(b,a)\right]^{-1} M_2 \Phi^V(b,s) \\ \qquad\qquad \text{für } a \le t < s \le b \end{cases}$$

II) $\dot{y}(t) = F(t,y(t))$

$\sum_{i=1}^{N} g_i(y(t_i)) = c$

Dann gilt mit geeigneten Matrizen M_i, $V(t)$:

$$y(t) = H(t)\left\{ c - \sum_{i=1}^{N}\left[g_i(y(t_i)) - M_i y(t_i)\right]\right\} + \int_a^b G(t,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right] ds$$

mit

$$H(t) = \Phi^V(t,a)\left[\sum_{i=1}^{N} M_i \Phi^V(t_i,a)\right]^{-1}$$

$$G(t,s) := \begin{cases} \Phi^V(t,a)\left[\sum_{i=1}^{N} M_i \Phi^V(t_i,a)\right]^{-1}\left[\sum_{t_i \le s} M_i \Phi^V(t_i,a)\right]\Phi^V(a,s) \\ \qquad\qquad a \le s < t \le b \\ -\Phi^V(t,a)\left[\sum_{i=1}^{N} M_i \Phi^V(t_i,a)\right]^{-1}\left[\sum_{t_i > s} M_i \Phi^V(t_i,a)\right]\Phi^V(a,s) \\ \qquad\qquad a \le t < s \le b \end{cases}$$

III) $\dot{y}(t) = F(t,y(t))$

$\int_a^b g(t,y(t))\,dt = c$

Dann gilt mit geeigneten Matrizen $M(t)$, $V(t)$:

$$y(t) = H(t)\left\{ c - \int_a^b \left[g(t,y(t)) - M(t)y(t)\right] dt \right\} + \int_a^b G(t,s)\left[F(s,y(s)) - V(s)y(s)\right] ds$$

mit

$$H(t) = \Phi^V(t,a)\left[\int_a^b M(t)\Phi^V(t,a)\,dt\right]^{-1}$$

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi^V(t,a)\left[\int_a^b M(t)\Phi^V(t,a)\,dt\right]^{-1} \cdot \\ \qquad \left[\int_a^s M(t)\Phi^V(t,a)\,dt\right]\Phi^V(a,s) \;;\; a \le s < t \le b \\ -\Phi^V(t,a)\left[M(t)\Phi^V(t,a)\,dt\right]^{-1} \cdot \\ \qquad \cdot\left[\int_s^b M(t)\Phi^V(t,a)\,dt\right]\Phi^V(a,s) \;;\; a \le t < s \le b \end{cases}$$

Für die Aufgaben I) - III) hat man nun also Darstellungen der Form

(6.32) $\qquad y = T(y) \qquad$ d.h. $\qquad y(t) = (T(y))(t)$

Dabei ist

$$T : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to C([a,b], \mathbb{R}^n)$$

ein Operator, der stetige Abbildungen von $[a,b]$ in $\mathbb{R}^n$ in ebensolche Abbildungen transformiert. Da $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit der Maximumsnorm ein Banach-Raum ist, kann man nun zur Lösung von (6.32) die verschiedenen in dieser Arbeit behandelten Verfahren heranziehen. Hierfür müssen jedoch zunächst die Ableitungen von T berechnet werden.

Satz VI.6: Gegeben sei der Integraloperator

$$[T(y)](t) := L(t)\,g(y(t_o)) + \int_a^b K(t,s)\,W(s,y(s))\,ds \qquad \text{mit} \quad t_o \in [a,b]$$

$L(t)$ sei auf $[a,b]$, $K(t,s)$ auf $[a,b]\times[a,b]$ beschränkt. g und W seien für jedes s n-mal stetig differenzierbar in y und mitsamt ihren Ableitungen stetig in s.
Dann ist T n-mal stetig differenzierbar und es gilt

$$\left[\left(T^{(\kappa)}(y)\right)(u_1,\ldots,u_\kappa)\right](t) = L(t)\left[\frac{\partial^\kappa g}{\partial y^\kappa}(y(t_o))\right](u_1(t_o),\ldots,u_\kappa(t_o)) +$$

$$+ \int_a^b K(t,s)\left[\frac{\partial^\kappa W}{\partial y^\kappa}(s,y(s))\right](u_1(s),\ldots,u_\kappa(s))\,ds$$

wobei $1 \le k \le n$.

Beweis:

$$\frac{\|T(y+\Delta y) - T(y) - [T'(y)]\Delta y\|}{\|\Delta y\|} =$$

$$= \frac{1}{\|\Delta y\|} \sup_{t\in[a,b]} \Big\| L(t)\Big\{ g(y(t_o) + \Delta y(t_o)) - g(y(t_o)) -$$

$$- \frac{\partial g}{\partial y}(y(t_o))\,\Delta y(t_o)\Big\} + \int_a^b K(t,s)\Big\{ W(s,y(s) + \Delta y(s)) -$$

$$- W(s,y(s)) - \frac{\partial W}{\partial y}(s,y(s))\,\Delta y(s)\Big\}\,ds\Big\|$$

$$\le \sup_{t\in[a,b]} \|L(t)\| \;\frac{\|g(y(t_o)+\Delta y(t_o)) - g(y(t_o)) - \frac{\partial g}{\partial y}(y(t_o))\,\Delta y(t_o)\|}{\sup_{t\in[a,b]}\|\Delta y(t)\|} +$$

$$+ (b-a) \sup_{t,s\in[a,b]} \|K(t,s)\| \;\frac{1}{\sup_{t\in[a,b]}\|\Delta y(t)\|} \sup_{s\in[a,b]} \|W(s,y(s) + \Delta y(s)) -$$

$$- W(s,y(s)) - \frac{\partial W}{\partial y}(s,y(s))\,\Delta y(s)\|$$

$$\le \sup_{t\in[a,b]} \|L(t)\| \;\frac{1}{\|\Delta y(t_o)\|}\Big\| g(y(t_o) + \Delta y(t_o)) - g(y(t_o)) -$$

$$- \frac{\partial g}{\partial y}(y(t_o))\,\Delta y(t_o)\Big\| + (b-a) \sup_{t,s\in[a,b]} \|K(t,s)\| \;\sup_{s\in[a,b]} \frac{1}{\|\Delta y(s)\|}$$

$$\Big\| W(s,y(s) + \Delta y(s)) - W(s,y(s)) - \frac{\partial W}{\partial y}(s,y(s))\,\Delta y(s)\Big\|$$

$$\to 0 \qquad \text{für} \qquad \| \Delta y \| \to 0$$

Für den ersten Summanden folgt dies aus der Differenzeirbarkeit von g nach y. Für den zweiten Summanden folgt dies aus der Differenzierbarkeit von W nach y für jedes s und der Stetigkeit des Ausdruckes in s, die auf einem Kompaktum gleichmäßig ist.
Entsprechend erhält man die Behauptung für die höheren Ableitungen. ∎

Sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, so erhält man leicht die Ableitungen des Operators (6.32):

$$(6.33)\quad [T(y)](t) = H(t)\Big\{ c - \sum_{t_i=a}^{b} [B(t_i, y(t_i)) - A(t_i)\, y(t_i)] \Big\} + \int_a^b G(t,s)\, [F(s, y(s)) - V(s)\, y(s)]\, ds$$

$$(6.34)\quad [(T'y)u](t) = H(t)\Big\{ - \sum_{t_i=a}^{b} \Big[\frac{\partial B}{\partial y}(t_i, y(t_i)) - A(t_i) \Big]\, u(t_i) \Big\} + \int_a^b G(t,s) \Big[\frac{\partial F}{\partial y}(s, y(s)) - V(s) \Big]\, u(s)\, ds$$

$$(6.35)\quad [(T''y)(u,v)](t) = H(t)\Big\{ - \sum_{t_i=a}^{b} \Big[\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}(t_i, y(t_i)) \Big]\, (u(t_i), v(t_i)) \Big\} + \int_a^b G(t,s) \Big[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(s, y(s)) \Big]\, (u(s), v(s))\, ds$$

Nach diesen Vorüberlegungen soll nun die Behandlung des Problems

$$(6.36)\qquad \dot{y}(t) = F(t, y(t))$$
$$\sum_{i=1}^{N} g_i(y(t_i)) = c$$

mit Hilfe des Newton-Verfahrens betrachtet werden. Schreibt man (6.36) als Operatorgleichung

$$y = T(y)$$

so liefert das Newton-Verfahren die Iterationsfolge

$$y_{n+1} = T(y_n) + [T'(y_n)](y_{n+1} - y_n)$$

oder

$$(6.37)\quad y_{n+1}(t) = H(t)\Big\{ c - \sum_{i=1}^{N} \Big[g_i(y_n(t_i)) + \frac{\partial g_i}{\partial y}(y_n(t_i)) \big[y_{n+1}(t_i) - y_n(t_i) \big] - M_i y_n(t_i) - M_i \big[y_{n+1}(t_i) - y_n(t_i) \big] \Big] \Big\} + \int_a^b G(t,s) \Big[F(s, y_n(s)) + \frac{\partial F}{\partial y}(s, y_n(s)) \big[y_{n+1}(s) - y_n(s) \big] - V(s) y_n(s) - V(s) \big[y_{n+1}(s) - y_n(s) \big] \Big]\, ds$$

Unter Beachtung der obigen Überlegungen zu Vielpunkt-Randwertproblemen kann man (6.37) wieder in der Form einer Differentialgleichung schreiben:

$$(6.38)\quad \dot{y}_{n+1}(t) = V(t) y_{n+1}(t) + F(t, y_n(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y_n(t)) \big[y_{n+1}(t) - y_n(t) \big] - V(t) y_{n+1}(t)$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_i y_{n+1}(t_i) = c - \sum_{i=1}^{N} \Big[g_i(y_n(t_i)) + \frac{\partial g_i}{\partial y}(y_n(t_i)) \left[y_{n+1}(t_i) - y_n(t_i) \right] - M_i y_{n+1}(t_i) \Big]$$

D.h.

$$\dot{y}_{n+1}(t) = F(t, y_n(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y_n(t)) \left[y_{n+1}(t) - y_n(t) \right] \tag{6.39}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Big[g_i(y_n(t_i)) + \frac{\partial g_i}{\partial y}(y_n(t_i)) \left[y_{n+1}(t_i) - y_n(t_i) \right] \Big] = c$$

Diese Approximation der Lösung eines nichtlinearen Randwertproblems durch eine Folge linearer Randwertprobleme wird als "Quasilinearisation" bezeichnet.

Analog erhält man für das Halley-Verfahren die Iterationsfolge

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(t, y_n(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y_n(t)) \left[x_{n+1}(t) - y_n(t) \right]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Big[g_i(y_n(t_i)) + \frac{\partial g_i}{\partial y}(y_n(t_i)) \left[x_{n+1}(t_i) - y_n(t_i) \right] \Big] = c$$

$$\dot{y}_{n+1}(t) = F(t, y_n(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y_n(t)) \left[y_{n+1}(t) - y_n(t) \right] + \frac{1}{2} \Big[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t, y_n(t)) \Big] \left(\left[x_{n+1}(t) - y_n(t) \right], \left[y_{n+1}(t) - y_n(t) \right] \right)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Big[g_i(y_n(t_i)) + \frac{\partial g_i}{\partial y}(y_n(t_i)) \left[y_{n+1}(t_i) - y_n(t_i) \right] + \frac{1}{2} \Big[\frac{\partial^2 g_i}{\partial y^2}(y_n(t_i)) \Big] \left(\left[x_{n+1}(t_i) - y_n(t_i) \right], \left[y_{n+1}(t_i) - y_n(t_i) \right] \right) \Big] = c$$

Hier müssen für jeden Iterationsschritt zwei lineare Randwertprobleme gelöst werden.

Die Iterationsfolgen der übrigen in dieser Arbeit behandelten numerischen Verfahren ergeben sich analog.

Zur Überprüfung der Konvergenzbedingungen der verschiedenen hier betrachteten Verfahren ist es noch erforderlich, numerisch möglichst "handliche" Abschätzungen für die Ableitungen des Operators T anzugeben. Dabei ist zu beachten, daß man bei der Darstellung

$$\left[T(y) \right](t) = H(t) \Big\{ c - \sum_{i=1}^{N} \left[g(y(t_i)) - M_i y(t_i) \right] \Big\} + \int_a^b G(t,s) \left[F(s, y(s)) - V(s) y(s) \right] ds$$

in der Wahl der Matrizen $V(t)$, M_i weitgehend frei ist. Diese Matrizen haben nämlich keinen Einfluß auf die Iterationsfolgen. Es muß lediglich gelten

$$\det \Big[\sum_{i=1}^{N} M_i \Phi^{V}(t_i, a) \Big] \neq 0$$

Um nun das Iterationsverfahren an der Stelle y_0 starten zu können, muß das entsprechende lineare Randwertproblem lösbar sein, d.h. es muß gelten

$$\det \Big[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_i}{\partial y}(y_0(t_i)) \, \Phi^{V^*}(t_i, a) \Big] \neq 0 \quad \text{mit} \quad V^*(t) := \frac{\partial F}{\partial y}(t, y_0(t))$$

Es liegt also nahe

$$(6.40)\qquad V(t) := \frac{\partial F}{\partial y}(t,y_0(t)) \quad ; \quad M_i := \frac{\partial g_i}{\partial y}(y_0(t_i))$$

zu wählen. Diese Wahl hat den großen Vorteil, daß dann gilt

$$\begin{aligned}[(T'(y_0))u](t) &= H(t)\Big\{-\sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{\partial g_i}{\partial y}(y_0(t_i)) - \frac{\partial g_i}{\partial y}(y_0(t_i))\Big]u(t_i) + \\ &+ \int_a^b G(t,s)\Big[\frac{\partial F}{\partial y}(s,y_0(s)) - \frac{\partial F}{\partial y}(s,y_0(s))\Big]u(s)\,ds \\ &\equiv 0 \qquad \text{d.h.} \quad T'(y_0) = \Theta\end{aligned}$$

Wenn man nun berücksichtigt, daß sich die Konvergenzsätze dieser Arbeit alle auf eine Operatorgleichung in Nullstellenform, d.h. $F(x) = \Theta$ beziehen, so muß man die Fixpunktform $y = T(y)$ zunächst umschreiben in $F(y) := y - T(y) = \Theta$ und erhält

$$F'(y) = I - T'(y) \quad ; \quad F''(y) = - T''(y)$$

Dann gilt mit der Wahl (6.40) für V, M_i:

$$(6.41)\qquad F'(y_0) = I \quad \text{d.h.} \quad [F'(y_0)]^{-1} = I \quad \text{d.h.} \quad \|[F'(y_0)]^{-1}\| = 1$$
$$\|F''(y)\| = \|T''(y)\|$$

Hierdurch werden die Schwierigkeiten und Genauigkeitsverluste bei der sonst stets problematischen Abschätzung von $\|[F'(y_0)]^{-1}\|$ vermieden. Es bleibt also nur noch $\|F''(y)\| = \|T''(y)\|$ abzuschätzen.

$$\begin{aligned}\|T''(y)\| &= \sup_{\|u\|,\|v\|\le 1}\|(T''(y))(u,v)\| \\ &= \sup_{\substack{t\in[a,b]\\ \|u\|,\|v\|\le 1}}\|[(T''(y))(u,v)](t)\| \\ &\le \sup_{t\in[a,b]} H(t) \sup_{\|u\|,\|v\|\le 1}\Big\|\sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{\partial^2 g_i}{\partial y^2}(y(t_i))\Big](u(t_i),v(t_i))\Big\| + \\ &\quad + (b-a)\sup_{t,s\in[a,b]}\|G(t,s)\| \sup_{\substack{s\in[a,b]\\ \|u\|,\|v\|\le 1}}\Big\|\Big[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(s,y(s))\Big](u(s),v(s))\Big\| \\ &\le \sup_{t\in[a,b]}\|H(t)\|\sum_{i=1}^{N}\Big\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial y}(y(t_i))\Big\| + (b-a)\sup_{t,s\in[a,b]}\|G(t,s)\| \cdot \\ &\quad \cdot \sup_{s\in[a,b]}\Big\|\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(s,y(s))\Big\|\end{aligned}$$

Für das folgende Beispiel sind noch einige Betrachtungen erforderlich, die sich auf die Differenzierbarkeit der Lösung eines Anfangswertproblems nach seinem Anfangswert beziehen und die Darstellung dieser Ableitung betreffen. Es wird gezeigt:

Satz VI.7: Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(6.42)\qquad \dot{y}(t) = F(t,y(t)) \quad ; \quad y(a) = c$$

mit $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Dabei sei F partiell nach y differenzierbar. F und $\partial F/\partial y$ seien auf $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ stetig. Es sei M eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Für alle $c \in M$ existiere auf $[a,b]$ eine Lösung von (6.42), wobei diese Lösung $y(t;c)$ für alle $c \in M$ auf $[a,b]$ gleichmäßig beschränkt sei, d.h.

$$\exists\, R : \sup_{t\in[a,b]}\|y(t;c)\| \le R \quad \forall\, c \in M$$

Dann sind für $c \in M$ die Lösungen $y(t) = y(t;c)$ von (6.42) nach dem Anfangswert $c = y(a)$ differenzierbar und die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial y(a)}(t)$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial y(a)}(t) = \frac{\partial F}{\partial y}(t,y(t))\ \frac{\partial y}{\partial y(a)}(t) \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial y(a)}(a) = I$$

Um diesen Satz beweisen zu können, sollen zunächst einige andere Sätze bewiesen werden.

Satz VI.8: Es sei $Z : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$ stetig. Dann gilt mit

$$K(x) := \| Z(x) \|$$

für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dx} Y(x) = Z(x)Y(x) \quad ; \quad Y(s) = I \quad ; \quad s \in [a,b] \quad ; \quad Y : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$$

die Abschätzung

$$\| Y(x) - I \| \le e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|} - 1 \quad \forall x \in [a,b]$$

Beweis: Es gilt

$$Y(x) = I + \int_s^x Z(t)Y(t)\,dt$$

Sei $$\varphi(x) := \| Y(x) - I \| = \left\| \int_s^x Z(t)Y(t)\,dt \right\| \le \left| \int_s^x \| Z(t) \|\, \| Y(t) \|\, dt \right|$$

Nun ist $$\varphi(x) = \| Y(x) - I \| \ge \| Y(x) \| - \| I \|$$

Also $$\varphi(x) + 1 \ge \| Y(x) \|$$

Also $$\varphi(x) \le \left| \int_s^x \| Z(t) \| \, [\varphi(t) + 1]\, dt \right| = \left| \int_s^x K(t)\, [\varphi(t) + 1]\, dt \right|$$

Die Funktion $c(x)$ sei nun definiert durch

$$\left| \int_s^x K(t)\, [\varphi(t) + 1]\, dt \right| =: c(x)\, e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|} - 1 \quad ; \quad c(s) = 1$$

Offenbar ist c differenzierbar und die Differentiation nach x liefert wegen

$$\left| \int_s^x K(t)\, [\varphi(t) + 1]\, dt \right| = \operatorname{sign}(x - s) \int_s^x K(t)\, [\varphi(t) + 1]\, dt$$

$$\operatorname{sign}(x - s)\, K(x)\, [\varphi(x) + 1] = c'(x)\, e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|} + \operatorname{sign}(x - s) \cdot$$

$$\cdot K(x)\, c(x)\, e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|}$$

$$= c'(x)\, e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|} + \operatorname{sign}(x - s)\, K(x) \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \left| \int_s^x K(t)\, [\varphi(t) + 1]\, dt \right| \right]$$

$$\operatorname{sign}(x - s)\, K(x) \varphi(x) = c'(x)\, e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|} + \operatorname{sign}(x - s)\, K(x) \cdot$$

$$\cdot \left| \int_s^x K(t)\,[\mathcal{P}(t) + 1]\,dt \right|$$

Wegen $K(x) \geq 0$, $\mathcal{P}(x) \leq \left| \int_s^x K(t)\,[\mathcal{P}(t) + 1]\,dt \right|$ gilt also

$$c'(x)\, e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|} + \operatorname{sign}(x - s)\, K(x) \left| \int_s^x K(t)\,[\mathcal{P}(t) + 1]\,dt \right| =$$

$$= \operatorname{sign}(x - s)\, K(x)\, \mathcal{P}(x)$$

$$\begin{cases} \leq \operatorname{sign}(x - s)\, K(x) \left| \int_s^x K(t)[\mathcal{P}(t) + 1]\,dt \right| & \text{für } x \geq s \\ \geq \operatorname{sign}(x - s)\, K(x) \left| \int_s^x K(t)[\mathcal{P}(t) + 1]\,dt \right| & \text{für } x < s \end{cases}$$

Somit

$$c'(x)\, e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|} \qquad \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \geq s \\ \geq 0 & \text{für } x < s \end{cases}$$

d.h.

$$c'(x) \qquad \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \geq s \\ \geq 0 & \text{für } x < s \end{cases}$$

Somit $c(x) \leq c(s) = 1$

Wenn man nun die Definition von $c(x)$ berücksichtigt, erhält man:

$$\underbrace{\left| \int_s^x K(t)\,[\mathcal{P}(t) + 1]\,dt \right|}_{= \mathcal{P}(x) \,:=\, \| Y(x) - I \|} = e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|} - 1$$

Also

$$\| Y(x) - I \| \leq e^{\left| \int_s^x K(t)\,dt \right|} - 1$$

wie behauptet. ∎

Satz VI.9: Es sei $V : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$ stetig und

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi^V(t,s) = V(t)\, \Phi^V(t,s) \quad ; \quad \Phi^V(s,s) = I \qquad (\Phi^V(t,s) \in \mathbb{R}^{n,n})$$

Dann gilt

$$\| \Phi^V \| := \sup_{t,s \in [a,b]} \| \Phi^V(t,s) \| \leq e^{(b - a)\|V\|}$$

mit $\| V \| := \sup_{t \in [a,b]} \| V(t) \|$

Beweis: Nach Satz VI.8 gilt

$$\| \Phi^V(t,s) - I \| \leq e^{\left| \int_s^t \|V(\tau)\|\,d\tau \right|} - 1 = e^{|t - s|\,\|V\|} - 1$$

Also:

$$\| \Phi^V(t,s) \| = e^{(b - a)\|V\|} \qquad \forall\, t,s \in [a,b]$$

Woraus die Behauptung folgt. ∎

Satz VI.10: Es seien $V : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und

$$\dot{y}(t) = V(t)y(t) + f(t) \quad ; \quad y(a) = 0$$

Dann ist $y(t) = y(t;f)$ und es gilt

$$\| y \| \to 0 \quad \text{für} \quad \| f \| \to 0$$

mit $\| y \| := \sup_{t \in [a,b]} \| y(t) \|$; $\| f \| := \sup_{t \in [a,b]} \| f(t) \|$

Beweis: Es ist

$$y(t) = \Phi^V(t,a)y(a) + \int_a^t \Phi^V(t,s)f(s)\,ds = \int_a^t \Phi^V(t,s)f(s)\,ds$$

Daraus folgt

$$\sup_{t \in [a,b]} \| y(t) \| \le (b-a) \sup_{t,s \in [a,b]} \| \Phi^V(t,s) \| \sup_{s \in [a,b]} \| f(s) \|$$

d.h.

$$y \le (b-a) \| \Phi^V \| \| f \| \le (b-a)\, e^{(b-a)\| V \|} \| f \| \to 0 \quad \text{für} \quad \| f \| \to 0$$

nach Satz VI.9. ∎

Satz VI.11: Unter den Voraussetzungen von Satz VI.7 hängen die Lösungen von (6.42) für $c \in M$ stetig von ihrem Anfangswert $y(a) = c$ ab.

Beweis: Sei $S_R := \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \le R \}$

$$L := \sup_{\substack{y \in S_R \\ t \in [a,b]}} \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(t,y) \right\|$$

Seien c, $c + \Delta c \in M$; seien $y(t;c)$, $y(t;c+\Delta c)$ gegeben durch

$$\dot{y}(t;c) = F(t,y(t;c)) \quad ; \quad y(a;c) = c$$

$$\dot{y}(t;c+\Delta c) = F(t,y(t;c+\Delta c)) \quad ; \quad y(a;c+\Delta c) = c + \Delta c$$

Dann gilt

$$y(t;c+\Delta c) - y(t;c) = \Delta c + \int_a^t [F(\tau,y(\tau;c+\Delta c)) - F(\tau,y(\tau;c))]\,d\tau$$

und somit

$$\| y(t;c+\Delta c) - y(t;c) \| \le \| \Delta c \| + L \int_a^t \| y(\tau;c+\Delta c) - y(\tau;c) \|\,d\tau \tag{6.43}$$

Denn $y(\tau;c+\Delta c)$ und $y(\tau;c)$ liegen nach den Voraussetzungen des Satzes für alle $\tau \in [a,b]$ in S_R.

Sei $\varphi(t) := \int_a^t \| y(\tau;c+\Delta c) - y(\tau;c) \|\,d\tau$ d.h. $\varphi(a) = 0$, so gilt $\dot{\varphi}(t) = \| y(t;c+\Delta c) - y(t;c) \|$ und wegen (6.43)

$$\alpha(t) \le \| \Delta c \| \quad \text{mit} \quad \alpha(t) := \dot{\varphi}(t) - L\,\varphi(t) \tag{6.44}$$

Aus $\dot{\varphi}(t) = L\,\varphi(t) + \alpha(t)$; $\varphi(a) = 0$ folgt

$$\varphi(t) = e^{L(t-a)} \int_a^t \alpha(t)\, e^{-L(\tau-a)}\,d\tau$$

Mit (6.44) folgt hieraus

$$\varphi(t) \le e^{L(t-a)} \| \Delta c \| \int e^{-L(\tau-a)}\,d\tau = \frac{1}{L} \| \Delta c \| \left[e^{L(t-a)} - 1 \right]$$

Wenn man dies unter Berücksichtigung der Definition von in (6.43) einsetzt, folgt

$$\| y(t;c+\Delta c) - y(t;c) \| \le \| \Delta c \|\, e^{L(t-a)}$$

Somit gilt

$$\sup_{t \in [a,b]} \| y(t;c+\Delta c) - y(t;c) \| \le \| \Delta c \|\, e^{L(b-a)} \to 0 \quad \text{für} \quad \| \Delta c \| \to 0 \tag{6.45}$$

Dies ist aber die behauptete Stetigkeit. ∎

Nun kann Satz VI.7 bewiesen werden.

Beweis von Satz VI.7: Seien c, $c + \Delta c \in M$

$$\dot{y}(t;c) = F(t,y(t;c)) \quad ; \quad y(a;c) = c$$
$$\dot{y}(t;c + \Delta c) = F(t,y(t;c + \Delta c)) \quad ; \quad y(a;c + \Delta c) = c + \Delta c$$

$$\dot{Z}(t;c) = \frac{\partial F}{\partial y}(t,y(t;c))\, Z(t;c) \quad ; \quad Z(a;c) = I \quad ; \quad Z(t;c) \in \mathbb{R}^{n,n}$$

und

$$\varphi(t) := \frac{1}{\|\Delta c\|}\left\{ y(t;c) + Z(t;c)\,\Delta c - y(t;c + \Delta c)\right\}$$

dann gilt $\varphi(a) = 0$ und

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{\|\Delta c\|}\left\{ F(t,y(t;c)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t,y(t;c))\, Z(t;c)\,\Delta c - \right.$$
$$\left. - F(t,y(t;c + \Delta c))\right\}$$

Die Differenzierbarkeit von F nach y bedeutet nun

$$F(t,y_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(t,y_1)[y_2 - y_1] - F(t,y_2) = \|y_2 - y_1\|\, f(t;y_1,y_2)$$

wobei gilt

$$f(t;y_1,y_2) \to 0 \quad \text{für} \quad \|y_1 - y_2\| \to 0 \quad \text{für jedes } t.$$

Wegen der Stetigkeitseigenschaften von F und $\frac{\partial F}{\partial y}$ ist f außerdem in t stetig. Es gilt somit:

$$(6.46)\quad \dot{\varphi}(t) = \frac{1}{\|\Delta c\|}\left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(t,y(t;c))\left[Z(t;c)\,\Delta c + y(t;c) - \right.\right.$$
$$\left. - y(t;c + \Delta c)\right] + \|y(t;c + \Delta c) - y(t;c)\| \cdot$$
$$\left. \cdot\, f(t;y(t;c), y(t;c + \Delta c))\right\}$$
$$= \frac{\partial F}{\partial y}(t,y(t;c))\,\varphi(t) + f(t;y(t;c), y(t;c + \Delta c)) \cdot$$
$$\cdot \frac{\|y(t;c + \Delta c) - y(t;c)\|}{\|\Delta c\|}$$

Dabei ist unter Berücksichtigung von Satz VI.11:

$$\sup_{t\in[a,b]} \|f(t;y(t;c), y(t;c + \Delta c))\| \frac{\|y(t;c + \Delta c) - y(t;c)\|}{\|\Delta c\|}$$
$$\leq \sup_{t\in[a,b]} \|f(t;y(t;c), y(t;c + \Delta c))\|\; e^{L(b-a)}$$
$$\to 0 \quad \text{für} \quad \|\Delta c\| \to 0$$

denn $\sup_{t\in[a,b]} \|y(t;c + \Delta c) - y(t;c)\| \to 0$ für $\|\Delta c\| \to 0$ wurde bereits bewiesen.

Dann geht aber f für jedes $t \in [a,b]$ gegen Null. Wegen der Stetigkeit von $f(t)$, die auf $[a,b]$ gleichmäßig ist, gilt dann aber

$$\|f\| := \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\| \to 0$$

Aus Satz VI.10 folgt nun aber unter Berücksichtigung von (6.46):

$$\sup_{t\in[a,b]} \frac{\|y(t;c) + Z(t;c)\,\Delta c - y(t;c+\Delta c)\|}{\|\Delta c\|} \to 0 \qquad \text{für} \quad \|\Delta c\| \to 0$$

Dies bedeutet aber die Behauptung, nämlich

$$Z(t;c) = \frac{\partial y(t;c)}{\partial c}$$

Beispiel:

Es werde noch einmal die Aufgabe betrachtet: Zu einer Reihe von Meßwerten b_j soll die nach kleinsten Fehlerquadraten beste ausgleichende Funktion mit der Gleichung

$$(6.47) \qquad f(t) = f(t;a,k_1,k_2) := \frac{a\,k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

bestimmt werden, d.h. es sind a,k_1,k_2 so zu bestimmen, daß gilt:

$$(6.48) \qquad \varphi(a,k_1,k_2) := \sum_{j=1}^{N} \left(f(t_j) - b_j\right)^2 \overset{!}{=} \min$$

Nun gilt für die Lösung der Differentialgleichung

$$(6.49) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -k_1 x_1(t) && ; \quad x_1(0) = a \\ \dot{x}_2(t) &= k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) && ; \quad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$x_2(t) = \frac{a\,k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

Dies bietet die Möglichkeit, die Aufgabe (6.47), (6.48) auf ein nichtlineares Vielpunkt-Randwertproblem zurückzuführen. Setzt man nämlich

$$y_1 := k_1 \quad ; \quad y_2 := k_2 \quad ; \quad y_3 := x_1 \quad ; \quad y_4 := x_2$$

so erhält man:

$$(6.50) \qquad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0 && ; \quad y_1(0) = k_1 \\ \dot{y}_2 &= 0 && ; \quad y_2(0) = k_2 \\ \dot{y}_3 &= -y_4 y_3 && ; \quad y_3(0) = a \\ \dot{y}_4 &= y_1 y_3 - y_2 y_4 && ; \quad y_4(0) = 0 \end{aligned}$$

$$(6.51) \qquad \sum_{i=1}^{N} \left(y_4(t_i) - b_i\right)^2 \overset{!}{=} \min$$

(Probleme dieses Typs treten als Spezialfälle von Optimierungsaufgaben mit gewöhnlichen Differentialgleichungen als Nebenbedingungen in biologischen, physiologischen und regelungstechnischen Untersuchungen nicht selten auf, wobei die Differentialgleichungen überdies nicht immer eine allgemeine Integration gestatten, so daß eine Zurückführung der Aufgabenstellung auf die Optimierung von Funktionalen auf dem $\mathbb{R}^n$ nicht immer möglich ist. Außerdem wird sich zeigen, daß die obige mathematische "Verkomplizierung" der Aufgabenstellung numerisch durch-

aus zu einer Vereinfachung führt, da nämlich hierdurch die extrem nichtlineare Problemstellung von Kapitel V auf eine quadratische Aufgabe zurückgeführt wird, was einen größeren Konvergenzbereich zur Folge hat.)

Indem man (6.51) mit 0.5 multipliziert und beachtet, daß

$$y_4(t) = y_4(t;\ y_1(0),\ y_2(0),\ y_3(0))$$

gilt, erhält man als Extremalbedingung

$$(6.52)\qquad \sum_{j=1}^{N} (y_4(t_j) - b_j)\ \frac{\partial y_4}{\partial y_1(0)}(t_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} (y_4(t_j) - b_j)\ \frac{\partial y_4}{\partial y_2(0)}(t_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} (y_4(t_j) - b_j)\ \frac{\partial y_4}{\partial y_3(0)}(t_j) = 0$$

Die $\dfrac{\partial y_i}{\partial y_j(0)}(t)$ erhält man aus dem Differentialgleichungssystem (6.50) durch partielle Differentiation nach den Anfangswerten. Bezeichnet man diese partiellen Ableitungen mit y_5 bis y_{20}, so gilt für die Matrix

$$(6.53)\qquad Y = \begin{pmatrix} y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \\ y_{17} & y_{18} & y_{19} & y_{20} \end{pmatrix}$$

mit

$$(6.54)\qquad \frac{d}{dt} Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & -y_1 & 0 \\ y_3 - y_4 & & y_1 - y_2 & \end{pmatrix} Y$$

$$Y(0) = I$$

$$Y_{ij}(t) = \frac{\partial y_i}{\partial y_j(0)}(t)$$

i.h.

$$y_{17} = \frac{\partial y_4}{\partial y_1(0)} \quad ; \quad y_{18} = \frac{\partial y_4}{\partial y_2(0)} \quad ; \quad y_{19} = \frac{\partial y_4}{\partial y_3(0)}$$

Das Differentialgleichungssystem (6.54) lautet ausführlich:

$$\dot{y}_5 = 0 \qquad ;\ y_5(0) = 1$$
$$\dot{y}_6 = 0 \qquad ;\ y_6(0) = 0$$
$$\dot{y}_7 = 0 \qquad ;\ y_7(0) = 0$$

$$\dot{y}_8 = 0 \qquad ; \quad y_8(0) = 0$$
$$\dot{y}_9 = 0 \qquad ; \quad y_9(0) = 0$$
$$\dot{y}_{10} = 0 \qquad ; \quad y_{10}(0) = 1$$
$$\dot{y}_{11} = 0 \qquad ; \quad y_{11}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{12} = 0 \qquad ; \quad y_{12}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{13} = -y_3\,y_5 - y_1\,y_{13} \qquad ; \quad y_{13}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{14} = -y_3\,y_6 - y_1\,y_{14} \qquad ; \quad y_{14}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{15} = -y_3\,y_7 - y_1\,y_{15} \qquad ; \quad y_{15}(0) = 1$$
$$\dot{y}_{16} = -y_3\,y_8 - y_1\,y_{16} \qquad ; \quad y_{16}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{17} = y_3\,y_5 - y_4\,y_9 + y_1\,y_{13} - y_2\,y_{17} \qquad ; \quad y_{17}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{18} = y_3\,y_6 - y_4\,y_{10} + y_1\,y_{14} - y_2\,y_{18} \qquad ; \quad y_{18}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{19} = y_3\,y_7 - y_4\,y_{11} + y_1\,y_{15} - y_2\,y_{19} \qquad ; \quad y_{19}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{20} = y_3\,y_8 - y_4\,y_{12} + y_1\,y_{16} - y_2\,y_{20} \qquad ; \quad y_{20}(0) = 1$$

Einen Teil dieser Differentialgleichungen kann man sofort lösen und erhält so

$$y_5 \equiv 1$$
$$y_6 \equiv 0$$
$$y_7 \equiv 0$$
$$y_8 \equiv 0$$
$$y_9 \equiv 0$$
$$y_{10} \equiv 1$$
$$y_{11} \equiv 0$$
$$y_{12} \equiv 0$$

$$\dot{y}_{13} = -y_3 - y_1\,y_{13} \qquad ; \quad y_{13}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{14} = -y_1\,y_{14} \qquad ; \quad y_{14}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{15} = -y_1\,y_{15} \qquad ; \quad y_{15}(0) = 1$$
$$\dot{y}_{16} = -y_1\,y_{16} \qquad ; \quad y_{16}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{17} = y_3 + y_1\,y_{13} - y_2\,y_{17} \qquad ; \quad y_{17}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{18} = -y_4 + y_1\,y_{14} - y_2\,y_{18} \qquad ; \quad y_{18}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{19} = y_1\,y_{15} - y_2\,y_{19} \qquad ; \quad y_{19}(0) = 0$$
$$\dot{y}_{20} = y_1\,y_{16} - y_2\,y_{20} \qquad ; \quad y_{20}(0) = 1$$

Man hat also nur noch zu betrachten:

$$\dot{y}_1 = 0$$
$$\dot{y}_2 = 0$$
$$\dot{y}_3 = -y_1\,y_3$$
$$\dot{y}_4 = y_1\,y_3 - y_2\,y_4$$
$$\dot{y}_{13} = -y_3 - y_1\,y_{13}$$

$$\dot{y}_{14} = - y_1 \, y_{14}$$
$$\dot{y}_{15} = - y_1 \, y_{15}$$
$$\dot{y}_{17} = y_3 + y_1 \, y_{13} - y_2 \, y_{17}$$
$$\dot{y}_{18} = - y_4 + y_1 \, y_{14} - y_2 \, y_{18}$$
$$\dot{y}_{19} = y_1 \, y_{15} - y_2 \, y_{19}$$

Mit den Randbedingungen

$$y_4(0) = 0$$
$$y_{13}(0) = 0$$
$$y_{14}(0) = 0$$
$$y_{15}(0) = 0$$
$$y_{17}(0) = 0$$
$$y_{18}(0) = 0$$
$$y_{19}(0) = 0$$
$$\sum_{j=1}^{N} (y_4(t_j) - b_j) \, y_{17}(t_j) = 0$$
$$\sum_{j=1}^{N} (y_4(t_j) - b_j) \, y_{18}(t_j) = 0$$
$$\sum_{j=1}^{N} (y_4(t_j) - b_j) \, y_{19}(t_j) = 0$$

Durch eine erneute Umbenennung

$$x_1 := y_1 \quad , \quad x_2 := y_2 \quad , \quad x_3 := y_3 \quad , \quad x_4 := y_4 \quad , \quad x_5 := y_{13}$$
$$x_6 := y_{14} \quad , \quad x_7 := y_{15} \quad , \quad x_8 := y_{17} \quad , \quad x_9 := y_{18} \quad , \quad x_{10} := y_{19}$$

erhält man schließlich das nichtlineare Vielpunkt-Randwertproblem

$$\dot{x}_1 = 0$$
$$\dot{x}_2 = 0$$
$$\dot{x}_3 = - x_1 \, x_3$$
$$\dot{x}_4 = x_1 \, x_3 - x_2 \, x_4$$
$$\dot{x}_5 = - x_3 - x_1 \, x_5$$
$$\dot{x}_6 = - x_1 \, x_6$$
$$\dot{x}_7 = - x_1 \, x_7$$
$$\dot{x}_8 = x_3 + x_1 \, x_5 - x_2 \, x_8$$
$$\dot{x}_9 = - x_4 + x_1 \, x_6 - x_2 \, x_9$$
$$\dot{x}_{10} = x_1 \, x_7 - x_2 \, x_{10}$$

Mit den Randbedingungen

$$\sum_{j=1}^{N} (x_4(t_j) - b_j) \, x_8(t_j) = 0$$
$$\sum_{j=1}^{N} (x_4(t_j) - b_j) \, x_9(t_j) = 0$$
$$\sum_{j=1}^{N} (x_4(t_j) - b_j) \, x_{10}(t_j) = 0$$
$$x_4(0) = 0 \quad ; \quad x_5(0) = 0 \quad ; \quad x_6(0) = 0 \quad ; \quad x_7(0) = 1$$
$$x_8(0) = 0 \quad ; \quad x_9(0) = 0 \quad ; \quad x_{10}(0) = 0$$

Die Aufgabe ist damit reduziert auf folgendes Problem:

(6.55) $\dot{x}(t) = F(x(t))$

$$M_0 x(0) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x(t_j)) = r \quad ; \quad t_j \in (0,b] \qquad \forall\, j$$

Mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_3 - x_2x_4 \\ -x_1x_5 - x_3 \\ -x_1x_6 \\ -x_1x_7 \\ x_3 + x_1x_5 - x_2x_8 \\ -x_4 + x_1x_6 - x_2x_9 \\ x_1x_7 - x_2x_{10} \end{pmatrix} \quad ; \quad g_j(x(t)) = \begin{pmatrix} [x_4(t) - b_j]\, x_8(t) \\ [x_4(t) - b_j]\, x_9(t) \\ [x_4(t) - b_j]\, x_{10}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad ; \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wählt man nun aus den oben erläuterten Gründen

$$V(t) := \frac{\partial F}{\partial x}(x^0(t)) \quad ; \quad M_j := \frac{\partial g_j}{\partial x}(x^0(t_j))$$

wobei $x^0(t)$ eine zunächst noch beliebige Ausgangsnäherung für die gesuchte Lösung von (6.55) sei, so erhält man:

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3^0 & 0 & -x_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3^0 & -x_4^0 & x_1^0 & -x_2^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_5^0 & 0 & -1 & 0 & -x_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_7^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5^0 & -x_8^0 & 1 & 0 & x_1^0 & 0 & 0 & -x_2^0 & 0 & 0 \\ x_6^0 & -x_9^0 & 0 & -1 & 0 & x_1^0 & 0 & 0 & -x_2^0 & 0 \\ x_7^0 & -x_{10}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^0 & 0 & 0 & -x_2^0 \end{pmatrix}$$

$$M_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_8^0(t_j) & 0 & 0 & 0 & x_4^0(t_j) - b_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_9^0(t_j) & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5^0(t_j) - b_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{10}^0(t_j) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_7^0(t_j) - b_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach den vorangegangenen Ausführungen kann man die Aufgabe (6.55) nun schreiben als Integralgleichung

(6.56) $$[T(x)](t) = x(t)$$

mit

$$[T(x)](t) = H(t)\left\{ r - \sum_{j=1}^{N} [g_j(x(t_j)) - M_j x(t_j)] \right\} + \int_a^b G(t,s)\,[F(x(s)) - V(s)x(s)]\,ds$$

wobei

$$G(t,s) := \begin{cases} \Phi^V(t,0)\left[M_o + \sum_{j=1}^{N} M_j \Phi^V(t_j,0)\right]^{-1} M_o \Phi^V(0,s) + \\ + \Phi^V(t,0)\left[M_o + \sum_{j=1}^{N} M_j \Phi^V(t_j,0)\right]^{-1} \sum_{t_i \le s} M_i \Phi^V(t_i,s) \\ \qquad\qquad \text{für} \quad 0 \le s < t \le b \\ - \Phi^V(t,0)\left[M_o + \sum_{j=1}^{N} M_j \Phi^V(t_j,0)\right]^{-1} \sum_{t_i > s} M_i \Phi^V(t_i,s) \\ \qquad\qquad \text{für} \quad 0 \le t < s \le b \end{cases}$$

$$H(t) = \Phi^V(t,0)\left[M_o + \sum_{j=1}^{N} M_j \Phi^V(t_j,0)\right]^{-1}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi^V(t,s) = V(t)\,\Phi^V(t,s) \quad ; \quad \Phi^V(s,s) = 0$$

Setzt man noch $t_o := 0$ und beachtet, daß dann $\Phi^V(t_o,0) = \Phi^V(0,0) = I$ gilt, so erhält man die übersichtliche Darstellung

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi^V(t,0)\left[\sum_{j=0}^{N} M_j \Phi^V(t_j,0)\right]^{-1} \sum_{t_i \le s} M_i \Phi^V(t_i,s) \\ \qquad\qquad \text{für} \quad 0 \le s < t \le b \\ - \Phi^V(t,0)\left[\sum_{j=0}^{N} M_j \Phi^V(t_j,0)\right]^{-1} \sum_{t_i > s} M_i \Phi^V(t_i,s) \\ \qquad\qquad \text{für} \quad 0 \le s < t \le b \end{cases}$$

$$H(t) = \Phi^V(t,0)\left[\sum_{j=0}^{N} M_j \Phi^V(t_j,0)\right]^{-1}$$

Wegen $\Phi^V(t_i,s) = \Phi^V(t_i,0)\,\Phi^V(0,s) = \Phi^V(t_i,0)\,\Phi^V(s,0)^{-1}$ gilt schließlich mit

$$\Phi^V(t) := \Phi^V(t,0)$$

$$H(t) = \Phi^V(t)\left[\sum_{j=0}^{N} M_j \Phi^V(t_j)\right]^{-1}$$

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi^V(t)\,\Big[\sum_{j=0}^{N} M_j\,\Phi^V(t_j)\Big]^{-1}\,\Big[\sum_{t_i\le s} M_i\,\Phi^V(t_i)\Big]\,\Phi^V(s)^{-1} \\ \qquad\qquad \text{für} \quad 0 \le s < t \le b \\ -\,\Phi^V(t)\,\Big[\sum_{j=0}^{N} M_j\,\Phi^V(t_j)\Big]^{-1}\,\Big[\sum_{t_i> s} M_i\,\Phi^V(t_i)\Big]\,\Phi^V(s)^{-1} \\ \qquad\qquad \text{für} \quad 0 \le t < s \le b \end{cases}$$

Setzt man

$$Q_i := M_i\,\Phi^V(t_i) \quad ; \quad R := \Big[\sum_{i=0}^{N} Q_i\Big]^{-1}$$

so ist

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi^V(t)\,R\,\Big[\sum_{t_i\le s} Q_i\Big]\,\Phi^V(s)^{-1} & \text{für } 0 \le s < t \le b \\ -\,\Phi^V(t)\,R\,\Big[\sum_{t_i> s} Q_i\Big]\,\Phi^V(s)^{-1} & \text{für } 0 \le t < s \le b \end{cases}$$

$$H(t) = \bar{\Phi}^V(t)\,R$$

Für die konkrete Überprüfung der Konvergenzbedingungen ist es nun notwendig $\|T''(x^0)\|$ abzuschätzen. Denn es war oben bereits ausgeführt worden, daß bei der hier getroffenen Wahl für V(t) und die M_j gilt

$$\|I - T'(x^0)\| = 1$$

Außerdem ist bei der hier betrachteten Problemstellung T'' konstant, d.h. nur von der Wahl der Startnäherung x^0 und der hierdurch bedingten Wahl von V(t) und M_j abhängig, da sowohl $\partial^2 F/\partial x^2$ als auch $\partial^2 g_j/\partial x^2$ konstant sind.
Es war nun bereits allgemein folgende Abschätzung hergeleitet worden

$$\|T''(x^0)\| \le \sup_{t\in[0,b]} \|H(t)\| \sum_{i=1}^{N} \Big\| \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^2} \Big\| + b \sup_{t,s\in[0,b]} \|G(t,s)\| \, \Big\| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big\|$$

Verwendet man für Vektoren die Maximumsnorm, d.h.

$$\|x\| = \|(x_1,\ldots,x_n)\| := \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$$

und die sich hieraus ergebenden mit der Maximumsnorm verträglichen Normen für Matrizen und Tensoren, d.h.

$$\|(A_{ij})_{i,j}\| := \max_i \sum_j |A_{ij}|$$
$$\|(B_{ijk})_{i,j,k}\| := \max_i \sum_{j,k} |B_{ijk}|$$

so rechnet man leicht nach, daß gilt

$$\Big\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^2} \Big\| = 2 \quad \text{für } j = 1,\ldots,N \quad ; \quad \Big\| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big\| = 4$$

wobei

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j\,\partial x_k} \Big)_{i,j,k=1,\ldots,10}$$

$$\frac{\partial^2 g_j}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial^2 g_{j,i}}{\partial x_k\,\partial x_\ell} \Big)_{i,k,l=1,\ldots,10}$$

Somit erhält man

$$\|T''(x^0)\| \le 2\,N \sup_{t\in[0,b]} \|H(t)\| + 4\,b \sup_{t,s\in[0,b]} \|G(t,s)\|$$

Das Problem der Überprüfung von Konvergenzvoraussetzungen ist damit reduziert worden auf eine möglichst genaue Abschätzung von

$$\sup_{t\in[0,b]} \|H(t)\| \quad \text{und} \quad \sup_{t,s\in[0,b]} \|G(t,s)\|$$

Diese Möglichkeit ergibt sich aus einer Verallgemeinerung von Satz VI.8.

Satz VI.12: Es seien $Z_1, Z_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$ stetig mit Ausnahme höchstens endlich vieler Sprungstellen. Dann gilt mit

$$K(x) := |Z_1(x)| \, |Z_2(x)|$$

für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dx} Y(x) = Z_1(x)\, Y(x)\, Z_2(x) \quad ; \quad Y(s) = Y_0 \quad , \quad s \in [a,b]$$

$$Y(x) : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$$

die Abschätzung

$$\|Y(x) - Y_0\| \leq \|Y_0\| \; e^{\left| \int_s^x K(t)\, dt \right|} - 1$$

Beweis: Es ist

$$Y(x) = Y_0 + \int_s^x Z_1(t)\, Y(t)\, Z_2(t)\, dt$$

Sei $\varphi(x) := \|Y(x) - Y_0\| = \left\| \int_s^x Z_1(t)\, Y(t)\, Z_2(t)\, dt \right\|$

(6.57) $$\leq \left| \int_s^x \|Z_1(t)\| \, \|Z_2(t)\| \, \|Y(t)\| \, dt \right| = \left| \int_s^x K(t) \, \|Y(t)\| \, dt \right|$$

Wegen $\varphi(x) = \|Y(x) - Y_0\| \geq \|Y(x)\| - \|Y_0\|$

also $\varphi(x) + \|Y_0\| \geq \|Y(x)\|$

Mit (6.57) also

$$\varphi(x) \leq \left| \int_s^x K(t) \left[\varphi(t) + \|Y_0\| \right] dt \right|$$

Die Abbildung $c:[a,b] \to \mathbb{R}$ sei nun definiert durch

(6.58) $$\left| \int_s^x K(t) \left[\varphi(t) + \|Y_0\| \right] dt \right| =: c(x) \; e^{\left| \int_s^x K(t)\, dt \right|} - \|Y_0\|$$

Dann ist notwendiger Weise $c(s) = \|Y_0\|$. Außerdem ist c differenzierbar und die Ableitung nach x liefert:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(x - s)\, K(x) \left[\varphi(x) + \|Y_0\| \right] = \\ &= c'(x) \; e^{\left| \int_s^x K(t)\, dt \right|} + \operatorname{sign}(x - s)\, K(x)\, c(x) \; e^{\left| \int_s^x K(t)\, dt \right|} \\ &= c'(x) \; e^{\left| \int_s^x K(t)\, dt \right|} + \operatorname{sign}(x - s)\, K(x) \left[\|Y_0\| + \left| \int_s^x K(t) \left[\varphi(t) + \|Y_0\| \right] dt \right| \right] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(x - s)\, K(x)\, \varphi(x) = c'(x) \; e^{\left| \int_s^x K(t)\, dt \right|} &+ \operatorname{sign}(x - s)\, K(x) \cdot \\ &\cdot \left| \int_s^x K(t) \left[\varphi(t) + \|Y_0\| \right] dt \right| \end{aligned}$$

Wegen $K(x) \geq 0$, $\varphi(x) \leq \left| \int_s^x K(t) \left[\varphi(t) + \|Y_0\| \right] dt \right|$ erhält man also

$$c'(x) \; e^{\left| \int_s^x K(t)\, dt \right|} = \operatorname{sign}(x - s) \left[K(x) \underbrace{\left\{ \varphi(x) - \left| \int_s^x K(t) \left[\varphi(t) + \|Y_0\| \right] dt \right| \right\}}_{\leq 0} \right]$$

Also

$$c'(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \geq s \\ \geq 0 & \text{für } x < s \end{cases}$$

Also $\quad c(x) \leq c(s) = \|Y_0\| \qquad \forall\, x \in [a,b]$

Mit (6.57) und (6.58) fogt dann aber die Behauptung

$$\|Y(x) - Y_0\| \leq \|Y_0\| \left[e^{\int_s^x K(t)\,dt} - 1 \right]$$

Eine unmittelbare Folgerung dieses Satzes ist:

Satz VI.13: Es sei $Z:[a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$ stetig mit Ausnahme höchstens endlich vieler Sprungstellen. Dann gilt mit

$$\|Z\| := \sup_{t \in [a,b]} \|Z(t)\|$$

für die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\frac{d}{dx} Y(x) = \pm\, Z(x)\, Y(x) \qquad ; \qquad Y(s) = Y_0$$

oder

$$\frac{d}{dx} Y(x) = \pm\, Y(x)\, Z(x) \qquad ; \qquad Y(s) = Y_0$$

die Abschätzung

$$\|Y(x)\| \leq \|Y_0\|\, e^{(b-a)\,\|Z\|}$$

Beweis: Indem man im vorhergehenden Satz jeweils $Z_1 = I$ oder $Z_2 = I$ setzt und beachtet, daß $\|Y(x) - Y_0\| \geq \|Y(x)\| - \|Y_0\|$; $\|I\| = 1$ und $\left|\int_s^x \|Z(t)\|\,dt\right| \leq (b-a)\,\|Z\|$ ist, erhält man die Behauptung.

Es sollen nun Abschätzungen für

$$\sup_{t \in [0,b]} \|H(t)\| \qquad \text{und} \qquad \sup_{t,s \in [0,b]} \|G(t,s)\|$$

angegeben werden.
Für $i \neq j$; $i,j = 0,1,\ldots,N$, $t_0, s_0 := 0$ seien die Mengen U_{ij} definiert durch

$$U_{ij} := \begin{cases} \{(t,s) : t \in (t_{i-1}, t_i] \ , \ s \in [s_j, t) \} & \text{für } i \leq j+1 \\ \{(t,s) : t \in [t_i, t_{i+1}) \ , \ s \in (t, s_j] \} & \text{für } j \leq i+1 \\ \{(t,s) : t \in (t_{i-1}, t_i] \ , \ s \in [s_j, s_{j+1}) \} & \text{für } i \geq j+2 \\ \{(t,s) : t \in [t_i, t_{i+1}) \ , \ s \in (s_{j-1}, s_j] \} & \text{für } j \geq i+2 \end{cases}$$

mit $s_i := t_i$ für $i = 1,\ldots,N$.
Für den Fall $N = 4$ und äquidistante t_j sind die U_{ij} in Abbildung VI/2 dargestellt. Dort ist der Rand der Mengen durchgezogen, wenn er zur Menge gehört und gestrichelt, wenn er nicht zur Menge gehört.
Seien

$$W_j^{(1)} := \bigcup_{i=0}^{j-1} U_{ij} \qquad ; \quad j = 1,2,\ldots,N$$

$$W_j^{(2)} := \bigcup_{i=j}^{N} U_{ij-1} \qquad ; \quad j = 1,2,\ldots,N$$

Diese Mengen sind in Abbildung VI/1 dargestellt für $N = 4$ und äquidistante t_j.
Der Definition von $G(t,s)$ entnimmt man, daß $G(t,s)$ auf den $W_j^{(1)}$, $W_j^{(2)}$, $j = 1,\ldots,N$ stetig ist. ($H(t)$ ist sogar auf ganz $[0,b]$ stetig.) $G(t,s)$ ist daher insbesondere auf den U_{ij} stetig. (Ebenso ist $H(t)$ auf den $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1,\ldots,N$, stetig.) Es sei nun $\{\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_K\}$ eine Verfeinerung von $\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$, d.h.

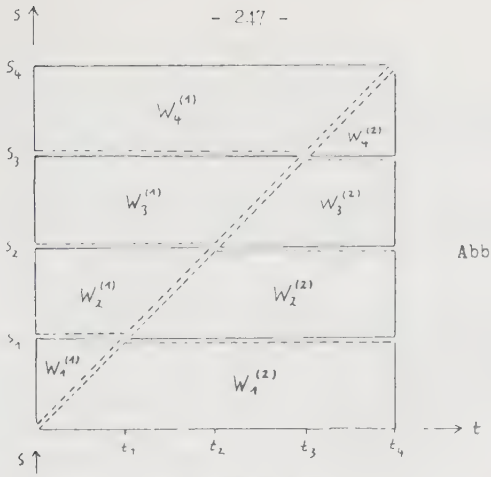


Abbildung VI/1

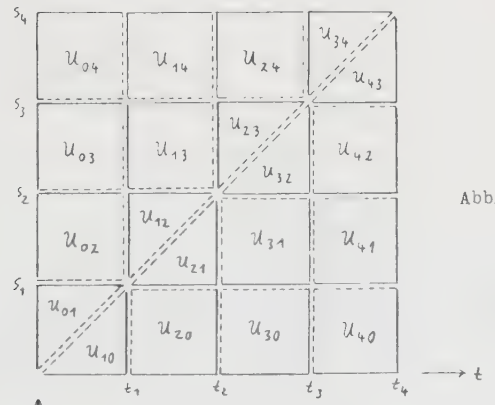


Abbildung VI/2

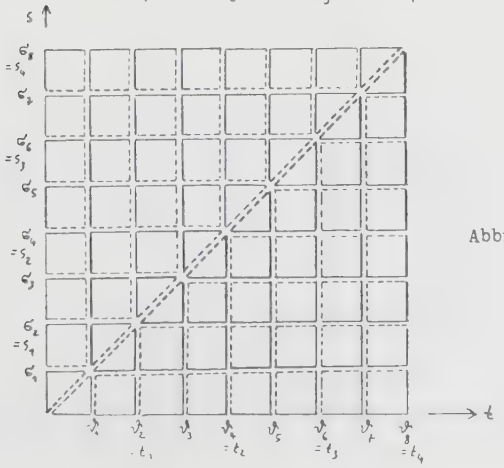


Abbildung VI/3

$$\{t_0, t_1, \ldots, t_N\} \subset \{\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_K\}$$

und es sei $\sigma_j := \vartheta_j$. Dann ist $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_K\}$ eine entsprechende Verfeinerung der $\{s_0, s_1, \ldots, s_N\}$. Analog zu den U_{ij} seien die V_{ij} durch die ϑ_i , σ_i definiert. In Abbildung VI/3 ist dargestellt, wie eine solche Verfeinerung z.B. aussieht. $G(t,s)$ ist dann auf den V_{ij} stetig und wegen

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi^V(t)\, R\, [\sum_{t_i \le s} Q_i]\, \Phi^V(s)^{-1} & \text{für } 0 \le s < t \le b \\ -\Phi^V(t)\, R\, [\sum_{t_i > s} Q_i]\, \Phi^V(s)^{-1} & \text{für } 0 \le t < s \le b \end{cases}$$

gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,s) = V(t)\, G(t,s)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} G(t,s) = -\, G(t,s)\, V(s)$$

auf den V_{ij} . Ebenso hat man wegen

$$H(t) = \Phi^V(t)\, R$$

auch

$$\frac{d}{dt} H(t) = V(t)\, H(t)$$

denn es ist

$$\frac{d}{dt} \Phi^V(t) = V(t)\, \Phi^V(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi^V(s)^{-1} &= -\, \Phi^V(s)^{-1}\, \frac{d}{ds} \Phi^V(s)\, \Phi^V(s)^{-1} \\ &= -\, \Phi^V(s)^{-1}\, V(s)\, \Phi^V(s)\, \Phi^V(s)^{-1} \\ &= -\, \Phi^V(s)^{-1} V(s) \end{aligned}$$

Man hat daher unter Beachtung von Satz VI.12 bzw. VI.13

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [a,b]} \|H(t)\| &= \max_{i=0,1,\ldots,K-1} \{ \sup_{t \in [\vartheta_i, \vartheta_{i+1}]} \|H(t)\| \} \\ &\le \max_{i=0,1,\ldots,K-1} \{ \|H(\vartheta_i)\| \exp((\vartheta_{i+1} - \vartheta_i) \sup \|V(t)\|) \} \end{aligned}$$

und

$$\sup_{t,s \in [a,b]} \|G(t,s)\| = \max_{i,j=0,1,\ldots,K-1} \sup_{t,s \in V_{ij}} \|G(t,s)\|$$

wobei für $i > j$

$$\begin{aligned} \sup_{t,s \in V_{ij}} \|G(t,s)\| &\le \sup_{s \in [\sigma_j, \sigma_{j+1})} \sup_{t \in [\vartheta_{i-1}, \vartheta_i]} \|G(t,s)\| \\ &\le \sup_{s \in [\sigma_j, \sigma_{j+1})} \|G(\vartheta_i, s)\| \exp((\vartheta_i - \vartheta_{i-1}) \sup \|V(t)\|) \\ &\le \|G(\vartheta_i, \sigma_j)\| \exp((\vartheta_i - \vartheta_{i-1}) \sup_{t \in [\vartheta_{i-1}, \vartheta_i]} \|V(t)\| + \\ &\quad + (\sigma_{j+1} - \sigma_j) \sup_{s \in [\sigma_j, \sigma_{j+1}]} \|V(s)\|) \end{aligned}$$

und entsprechend für $i < j$

$$\begin{aligned} \sup_{t,s \in V_{ij}} \|G(t,s)\| \le \|G(\vartheta_i, \sigma_j)\| &\exp((\vartheta_{i+1} - \vartheta_i) \sup_{t \in [\vartheta_i, \vartheta_{i+1}]} \|V(t)\| + \\ &+ (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \sup_{s \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]} \|V(s)\|) \end{aligned}$$

Sind die ϑ_i , σ_i alle äquidistant, z.B. $\vartheta_{i+1} - \vartheta_i =: \delta \quad \forall\, i$ und ist

$$\|V\| := \sup_{t \in [a,b]} \|V(t)\|$$

so kann man die Abschätzungen noch weiter vereinfachen zu

$$\sup_{t\in[0,b]} \|H(t)\| \leq \max_{i=0,1,\dots,K-1} \{ \|H(\vartheta_i)\| \, e^{\delta \|V\|} \}$$

$$\sup_{t,s\in[0,b]} \|G(t,s)\| \leq \max_{\substack{i,j=0,1,\dots,K-1 \\ i\neq j}} \{ \|G(\vartheta_i, \sigma_j)\| \, e^{2\,\delta \|V\|} \}$$

Da die Abbildung $V(t)$ für eine Startnäherung $x^0(t)$ durch die Komponenten dieser Startnäherung vorgegeben ist, kann man stets

$$\sup_{t\in[\vartheta_i, \vartheta_{i+1}]} \|V(t)\| \qquad \text{usw.}$$

bestimmen.

Die gewünschten Abschätzungen verlaufen nun in folgender, allgemein programmierbarer Weise: Es wird eine Startnäherung $x^0(t)$ vorgegeben. Außerdem sind im konkreten Anwendungsfall natürlich die t_j und die b_j bekannt. Hierdurch sind dann eindeutig die Matrizen $V(t)$ und M_j bestimmt. Man kann dann numerisch den Wert von $\Phi^V(t)$ für jedes $t \in [0,b]$ durch Integration von

$$\frac{d}{dt} \Phi^V(t) = V(t)\, \Phi^V(t) \qquad ; \qquad \Phi^V(0) = I$$

bestimmen. Also kann man die

$$Q_i := M_i\, \Phi^V(t_i) \qquad \text{und} \qquad R := \Big[\sum_{i=0}^{N} Q_i\Big]^{-1}$$

berechnen. Außerdem kann man nach Vorgabe gewisser Punkte ϑ_i und σ_j auch die

$$\|H(\vartheta_i)\| \qquad \text{und} \qquad \|G(\vartheta_i, \sigma_j)\|$$

berechnen. Die Bestimmung der

$$\sup_{t\in[\vartheta_i, \vartheta_{i+1}]} \|V(t)\| \qquad \text{etc.}$$

ist für den Fall, daß die Startnäherung als analytischer Ausdruck vorgegeben wird (z.B. als Polynom o.ä.) ebenfalls exakt möglich. Man verfügt dann aber über alle Daten, die zur Abschätzung von $\|T''(x^0)\|$ erforderlich sind.

Für die folgenden numerischen Beispiele werden die auszugleichenden "Meßwerte" so gewählt, daß sie der Gleichung

$$b_i = \frac{a\, k_1}{k_2 - k_1} \left(e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i}\right)$$

$$i = 1(1)20 \quad , \quad t_i = i \cdot 0.15$$

$$a = 3.0 \quad , \quad k_1 = 1.0 \quad , \quad k_2 = 2.0$$

genügen.

Die Startnäherung $x^0(t)$ wird in folgender Weise bestimmt: Für die gesuchten Werte a, k_1, k_2 werden Näherungswerte geschätzt. Diese Näherungswerte a^0, k_1^0, k_2^0 werden als Anfangswerte

$$x_1^0(t=0) = k_1^0$$

$$x_2^0(t=0) = k_2^0$$

$$x_3^0(t=0) = a^0$$

für das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = F(x(t))$$

gewählt, das man dann zusammen mit

$$x_4^0(t=0) = 0$$

$$x_5^0(t=0) = 0$$
$$x_6^0(t=0) = 0$$
$$x_7^0(t=0) = 1$$
$$x_8^0(t=0) = 0$$
$$x_9^0(t=0) = 0$$
$$x_{10}^0(t=0) = 0$$

integrieren kann. Man erhält so für den Startvektor (wenn man die Integration nicht gleich numerisch durchführen will):

$$x_1^0(t) = k_1^0$$
$$x_2^0(t) = k_2^0$$
$$x_3^0(t) = a^0 e^{-k_1^0 t}$$
$$x_4^0(t) = \frac{a^0 k_1^0}{k_2^0 - k_1^0} (e^{-k_1^0 t} - e^{-k_2^0 t})$$
$$x_5^0(t) = -a^0 t e^{-k_1^0 t}$$
$$x_6^0(t) = 0$$
$$x_7^0(t) = e^{-k_1^0 t}$$
$$x_8^0(t) = \frac{a^0 k_2^0}{(k_2^0 - k_1^0)^2} (e^{-k_1^0 t} - e^{-k_2^0 t}) - \frac{a^0 k_1^0}{k_2^0 - k_1^0} t e^{-k_1^0 t}$$
$$x_9^0(t) = -\frac{a^0 k_1^0}{(k_2^0 - k_1^0)^2} (e^{-k_1^0 t} - e^{-k_2^0 t}) + \frac{a^0 k_1^0}{k_2^0 - k_1^0} t e^{-k_2^0 t}$$
$$x_{10}^0(t) = \frac{k_1^0}{k_2^0 - k_1^0} (e^{-k_1^0 t} - e^{-k_2^0 t})$$

In den folgenden Beispielen werden nur die k_1^0, k_2^0, a^0 angegeben, da durch sie dann die Startnäherung eindeutig bestimmt ist und auch nur diese Werte in der ursprünglichen Aufgabenstellung wirklich interessieren. Demgemäß wird von der ersten Näherung auch nur $x_1^1(0)$, $x_2^1(0)$, $x_3^1(0)$ angegeben. Sei zur Abkürzung $y^n := (x_1^n(0), x_2^n(0), x_3^n(0))$. Es sei noch angemerkt, daß man zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen $\|x^1 - x^0\|$ benötigt und daß i.a. $\|x^1 - x^0\| \neq \|y^1 - y^0\|$ ist. Ebenso hat man bei den Fehlerabschätzungen zu beachten, daß man Abschätzungen für $\|x^* - x^n\|$ erhält, obwohl der Anwender eigentlich an einer Abschätzung für $\|y^* - y^n\|$ interessiert ist. Wegen $\|y^* - y^n\| \leq \|x^* - x^n\|$ behalten die Abschätzungen jedoch auch dann ihre Gültigkeit, wenn sie auch naturgemäß etwas schlechter ausfallen.

Es werden hier nur die Konvergenzbedingungen des Newton-Verfahrens nach Satz I.2 und die des Halley-Verfahrens nach den Sätzen III.1 und III.8 betrachtet. Da nämlich die zweite Ableitung des hier betrachteten Operators konstant ist, d.h. die dritte Ableitung verschwindet, sind die Konvergenzbedingungen der Sätze II.14 (Tschebyscheff-Verfahren) und III.18 (Halley-Verfahren) in diesem Falle mit den Konvergenzbedingungen des Newton-Verfahrens nach Satz I.2 identisch. Verfahren höherer Ordnung (Satz IV.1 und Satz IV.3) sind bei derartigen Aufgaben ebenfalls nur von geringerem Interesse.

Die Fehlerabschätzung für das Newton-Verfahren wird gemäß Satz I.4 durchgeführt, wobei die unbekannten Größen β_1 und μ_1 (es wird hier nur jeweils der erste Schritt betrachtet, so daß nur β_0 und μ_0 verfügbar sind) gemäß

$$\beta_1 \leq \frac{\beta_0}{1 - \mu_0} \quad ; \quad \mu_1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{1 - \mu_0}\right)^2$$

abgeschätzt werden. Die Fehlerschranken für das Halley-Verfahren wurden rekursiv berechnet. (Siehe hierzu die Ausführungen im Anschluß an Satz III.7, die sich leicht auf die Sätze III.1 und III.8 anwenden lassen.)

Es werde als Startnäherung gewählt:

$$y^0 := (0.99998417 \ , \ 1.99998417 \ , \ 2.99998417)$$

Dann lautet die erste durch das Newton-Verfahren berechnete Näherung

$$y_N^1 = (0.99999999428026 \ , \ 2.0000000126943 \ , \ 3.0000000218880)$$

Die erste durch das Halley-Verfahren berechnete Näherung ist

$$y_H^1 = (0.99999999998994 \ , \ 2.0000000000970 \ , \ 3.0000000003182)$$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \beta_0 = 0.21597517513072 \ 10^{-4}$$

Die Norm der Halley-Korrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.21611727859749 \ 10^{-4}$$

Weiter erhält man die Abschätzungen

$$\sup_t \| H(t) \| \leq 572.43341677207$$

$$\sup_{t,s} \| G(t,s) \| \leq 20.523066617238$$

Somit erhält man für die Abschätzung der Norm der 2. Ableitung:

$$K_2 = 23143.613470290$$

Man besitzt nun alle Informationen zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze und erhält:

$$\mu_0 = K_2 \beta_0 = 0.49984459724035$$

$$\nu_0 = K_2 \delta_0 = 0.50017347601112$$

Es sind sowohl die Konvergenzvoraussetzungen von Satz I.2 (Newton-Verfahren) als auch die der Sätze III.1 und III.8 (Halley-Verfahren) erfüllt. Die Fehlerabschätzung für das Newton-Verfahren lautet:

$$\| y^* - y_N^1 \| \leq \| x^* - x_N^1 \| \leq 2.084915416 \ 10^{-5}$$

Tatsächlich ist

$$\| y^* - y_N^1 \| = 2.1888 \ 10^{-8}$$

Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.8 lautet:

$$\| y^* - y_H^1 \| \leq \| x^* - x_H^1 \| \leq 3.978592489 \ 10^{-6}$$

Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.1 lautet:

$$\| y^* - y_H^1 \| \leq \| x^* - x_H^1 \| \leq 3.801082872 \ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist:

$$\| y^* - y_H^1 \| = 3.182 \ 10^{-10}$$

Es werde als Startnäherung gewählt:

$$y^0 := (1.00001576 \ , \ 2.00001576 \ , \ 3.00001576)$$

Dann lautet die erste durch das Newton-Verfahren berechnete Näherung

$$y_N^1 = (0.99999999437763\ ,\ 2.0000000128889\ ,\ 3.0000000223615)$$

Die erste durch das Halley-Verfahren berechnete Näherung ist

$$y_H^1 = (1.0000000000333\ ,\ 2.0000000002046\ ,\ 3.0000000005734)$$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \mathcal{S}_0 = 0.21529918747376\ 10^{-4}$$

Die Norm der Halley-Kerrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.21515735838307\ 10^{-4}$$

Weiter erhält man die Abschätzungen

$$\sup_t \|H(t)\| \leq 574.36711896477$$

$$\sup_{t,s} \|G(t,s)\| \leq 20.596409163546$$

Somit erhält man für die Abschätzung der Norm der zweiten Ableitung:

$$K_2 = 23221.841668553$$

Man besitzt nun alle Informationen zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze und erhält:

$$\mu_0 = K_2 \mathcal{S}_0 = 0.49996436428838$$

$$\nu_0 = K_2 \delta_0 = 0.49963501101957$$

Es sind sowohl die Konvergenzvoraussetzungen von Satz I.2 (Newton-Verfahren) als auch die der Sätze III.1 und III.8 (Halley-Verfahren) erfüllt. Die Fehlerabschätzung für das Newton-Verfahren lautet:

$$\| y^* - y_N^1 \| \leq \| x^* - x_N^1 \| \leq 2.116944009\ 10^{-5}$$

Tatsächlich ist

$$\| y^* - y_N^1 \| = 2.23615\ 10^{-8}$$

Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.8 lautet:

$$\| y^* - y_H^1 \| \leq \| x^* - x_H^1 \| \leq 3.944038009\ 10^{-6}$$

Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.1 lautet:

$$\| y^* - y_H^1 \| \leq \| x^* - x_H^1 \| \leq 3.769361839\ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist:

$$\| y^* - y_H^1 \| = 5.734\ 10^{-10}$$

Es werde als Startnäherung gewählt:

$$y^0 := (0.99998101\ ,\ 1.99998101\ ,\ 2.99998101)$$

Dann lautet die erste durch das Newton-Verfahren berechnete Näherung

$$y_N^1 = (0.99999999177567\ ,\ 2.0000000182244\ ,\ 3.0000000313581)$$

Die erste durch das Halley-Verfahren berechnete Näherung ist

$$y_H^1 = (0.99999999998181\ ,\ 2.0000000000953\ ,\ 3.0000000003078)$$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \mathcal{S}_0 = 0.25905527692771\ 10^{-4}$$

Die Norm der Halley-Korrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.25925963708318\ 10^{-4}$$

Weiter erhält man die Abschätzungen

$$\sup_t \| H(t) \| \leq 572.24366024104$$

$$\sup_{s,t} \| G(t,s) \| \leq 20.517699506081$$

Somit erhält man für die Abschätzung der Norm der 2. Ableitung:

$$K_2 = 23135.958803714$$

Man besitzt nun alle Informationen zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze und erhält:

$$\mu_0 = K_2 \mathcal{S}_0 = 0.59934922148843$$

$$\nu_0 = K_2 \delta_0 = 0.59982202830223$$

Die Konvergenzvoraussetzung für das Newton-Verfahren (Satz I.2) ist also nicht erfüllt. Ebensowenig ist die Konvergenzvoraussetzung von Satz III.8 erfüllt. Durch Satz III.1 wird aber dennoch die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.1 lautet:

$$\| y^* - y_H^1 \| \leq \| x^* - x_H^1 \| \leq 1,127236609\ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist

$$\| y^* - y_H^1 \| = 3.078\ 10^{-10}$$

Es werde als Startnäherung gewählt:

$$y^0 := (1.00001928\ ,\ 2.00001928\ ,\ 3.00001928)$$

Dann lautet die erste durch das Newton-Verfahren berechnete Näherung

$$y_N^1 = (0.99999999156707\ ,\ 2.0000000191871\ ,\ 3.0000000331788)$$

Die erste durch das Halley-Verfahren berechnete Näherung ist

$$y_H^1 = (1.0000000000413\ ,\ 2.0000000002096\ ,\ 3.0000000005900)$$

Die Norm der Newton-Korrektur ist

$$\| x_N^1 - x^0 \| = \mathcal{S}_0 = 0.26342406513891\ 10^{-4}$$

Die Norm der Halley-Korrektur ist

$$\| x_H^1 - x^0 \| = \delta_0 = 0.26321170000898\ 10^{-4}$$

Weiter erhält man die Abschätzungen

$$\sup_t \| H(t) \| \leq 574.58672020938$$

$$\sup_{s,t} \| G(t,s) \| \leq 20.606794343589$$

Somit erhält man für die Abschätzung der Norm der zweiten Ableitung:

$$K_2 = 23230.750340498$$

Man besitzt nun alle Informationen zur Überprüfung der Konvergenzvoraussetzungen der einzelnen Sätze und erhält:

$$\mu_0 = K_2 \mathcal{S}_0 = 0.61195386909210$$

$$\nu_0 = K_2 \delta_0 = 0.61146052896067$$

Die Konvergenzvoraussetzung für das Newton-Verfahren ist also nicht erfüllt. Ebensowenig ist die Konvergenzvoraussetzung von Satz III.8

erfüllt. Durch Satz III.1 wird aber dennoch die Konvergenz des Halley-Verfahrens garantiert. Die Fehlerabschätzung für das Halley-Verfahren nach Satz III.1 lautet:

$$\| y^* - y_H^1 \| \leq \| x^* - x_H^1 \| \leq 1.578844271\ 10^{-6}$$

Tatsächlich ist

$$\| y^* - y_H^1 \| = 5.9\ 10^{-10}$$

Betrachtet man nun diese Beispiele, so stellt man fest, daß die Konvergenzvoraussetzungen des Newton-Verfahrens gerade noch erfüllt waren für Startnäherungen y^0 mit

$$\| y^* - y^0 \| = 1.583\ 10^{-5} \quad \text{bzw.} \quad \| y^* - y^0 \| = 1.576\ 10^{-5}$$

Die Konvergenzvoraussetzungen des Halley-Verfahrens (Satz III.1) ließen sich jedoch noch erfüllen für

$$\| y^* - y^0 \| = 1.899\ 10^{-5} \quad \text{bzw.} \quad \| y^* - y^0 \| = 1.928\ 10^{-5}$$

Die Startnäherung kann also für das Halley-Verfahren um rund 20% schlechter sein als für das Newton-Verfahren. Ein im Lichte der bisher allgemein geäußerten Ansichten zu Iterationsverfahren höherer Ordnung sicher überraschendes Ergebnis.

Ergänzungen: Die hier betrachtete Aufgabe (6.48) ist mit der in Kapitel V betrachteten Aufgabe (5.2) identisch. Vor der numerischen Behandlung wurde dort jedoch (5.2) mittels der Parametertransformation

$$A := a\, k_1 / (k_2 - k_1)$$

in Aufgabe (5.3) umgeformt. $a = 3.0$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 2.0$ in (5.2) bzw. (6.48) entspricht daher $A = 3.0$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 2.0$ in (5.3). Trotz der Verschiedenheit der Aufgaben (5.3) und (6.48) legt ihre enge Verwandtschaft es nahe, die numerischen Ergebnisse der Kap.V und VI zu vergleichen. Dabei zeigt sich, daß in Kap.VI die Konvergenz des Verfahrens noch beweisbar ist für Startwerte, die rund eine Zehnerpotenz schlechter (d.h. weiter von der Lösung entfernt) sind als die Startnäherung, die in Kapitel V notwendig waren. Auch die Fehlerabschätzungen fallen hier um rund eine Zehnerpotenz besser aus als die entsprechenden Fehlerschranken in Kap.V. Die etwas aufwendige Umformung der Aufgabenstellung in ein nichtlineares Vielpunkt-Randwertproblem hat sich also letztlich bezahlt gemacht. Dies liegt offenbar daran, daß das in Kap.V betrachtete Problem "extrem" nichtlinear ist, während es nach seiner Umwandlung in ein Vielpunkt-Randwertproblem einer quadratischen Operatorgleichung entspricht, d.h. einer Operatorgleichung, deren zweite Ableitung bereits konstant ist.

Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob man eventuell durch eine andere als die hier getroffene Wahl für die Matrizen $V(t)$ und M_j noch eine Verbesserung der Abschätzungen erreichen könnte. Diese Frage kann man verneinen. Zur Begründung werde folgende Überlegung durchgeführt, die auch von allgemeinerem Interesse ist:
Es sei X ein Banach-Raum und $F: X \to X$ eine Abbildung. Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $F(x) = \Theta$. Löst man diese Gleichung z.B. mit Hilfe des Newton-Verfahrens, so erhält man die Iterationsfolge

$$x_{n+1} = x_n - \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)$$

Um die Frage nach der Konvergenz dieser Folge zu entscheiden, muß man

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \, \| F''(x) \| \, \| x_1 - x_0 \|$$

abschätzen. Sei nun A ein beliebiger, linearer, invertierbarer Operator $A: X \to X$. Dann ist die Gleichung $F(x) = \Theta$ äquivalent mit der Gleichung

$$A F(x) = \Theta$$

Wendet man auf diese Gleichung das Newton-Verfahren an, so erhält man die gleiche Iterationsfolge wie oben, hat nun aber abzuschätzen

$$\| [A F'(x_0)]^{-1} \| \, \| A F''(x) \| \, \| x_1 - x_0 \|$$

Hier stellt sich dann die Frage, für welche Wahl von A diese Abschätzungen am besten ausfällt. Nun ist für beliebiges, invertierbares A:

$$\begin{aligned} \| [F'(x_0)]^{-1} F''(x) \| &= \| [A F'(x_0)]^{-1} A F''(x) \| \\ &\leq \| [A F'(x_0)]^{-1} \| \, \| A F''(x) \| \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß

$$A = [F'(x_0)]^{-1}$$

die beste Wahl ist. Statt $F(x) = \Theta$ sollte man bei den Überprüfungen von Konvergenzvoraussetzungen also das äquivalente Problem

$$G(x) := [F'(x_0)]^{-1} F(x) = \Theta$$

betrachten, für das sich die gleiche Iterationsfolge ergibt und für das die Abschätzung lautet

$$\| [G'(x_0)]^{-1} \| \, \| G''(x) \| = \| [F'(x_0)]^{-1} F''(x) \|$$

da $G'(x_0) = I$ ist. (Der Satz über das Newton-Verfahren wird oftmals gleich in dieser Formulierung angegeben.) Da nur für $A = [F'(x_0)]^{-1}$ gilt $G'(x_0) = I$, und da bereits gezeigt wurde, daß mit der hier getroffenen Wahl für die Matrizen $V(t)$ und M_j die betrachtete Operatorgleichung diese Eigenschaft hat, so ist die hier gegebene Abschätzung in Bezug auf die Wahl der $V(t)$ und M_j tatsächlich optimal.
Völlig analoge Überlegungen zeigen, daß man bei den Sätzen III.1, III.7 und III.8 über das Halley-Verfahren statt

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \, \| F''(x) \| \, \| x_1 - x_0 \| \quad \text{und} \quad \| [F'(x_0)]^{-1} \| \, \| F'''(x) \| \, \| x_1 - x_0 \|^2$$

abzuschätzen, auch die (bessere und im obigen Sinne beste) Abschätzung

$$\| [F'(x_0)]^{-1} F''(x) \| \, \| x_1 - x_0 \| \quad ; \quad \| [F'(x_0)]^{-1} F'''(x) \| \, \| x_1 - x_0 \|^2$$

verwenden könnte. Da dies jedoch nicht in allen Fällen mit vertretbarem Aufwand möglich ist, wurde in den Sätzen dieser Arbeit der ersten Darstellung der Vorzug gegeben.

Literatur:

[1] Athans, M. / Falb, P. L. — Optimal Control. Mc Graw-Hill Book Company. 1966

[2] Bellman, R. E. / Kalaba, R. E. — Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems. American Elsevier Publishing Company, New York. 1965

[3] Collatz, L. — The numerical treatmant of Differential equations
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York. 1966

[4] Falb, P. L.
de Jong, J. L. — Some successive approximation methods in control and oscillation theory
Academic Press, New York/London. 1969

[5] Knobloch, H. W.
Kappel, F. — Gewöhnliche Differentialgleichungen
Teubner-Verlag, Stuttgart. 1974

[6] Stoer, J.
Bulirsch, R. — Einführung in die Numerische Mathematik II
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York. 1973

Lebenslauf

5.4.1952	geboren in Neuss als Sohn des Heinrich Meyer und seiner Ehefrau Lieselotte, geb. Lüttge
1958 - 1962	Martin-Luther-Schule in Neuss
1962 - 1970	Theodor-Schwann-Gymnasium in Neuss
1970	Reifeprüfung
1970/71	Studium der Mathematik an der Universität Düsseldorf
1971 - 1972	Studium der Medizin an der Universität Düsseldorf
ab 1972	Studium der Mathematik, Physik und Medizin an der Universität Düsseldorf
1972	Diplom-Mathematiker-Vorprüfung und Diplom-Physiker-Vorprüfung
1973	Naturwissenschaftliche Vorprüfung der Medizin
1974	Ärztliche Vorprüfung der Medizin
1978	Diplom-Prüfung in Mathematik